Lluís A. Santaló

124

La matemática: una filosofía y una técnica

Ariel

Lluís A. Santaló

LA MATEMÁTICA: UNA FILOSOFÍA Y UNA TÉCNICA

Edición a cargo de
JOAN PAGÈS

EDITORIAL ARIEL, S. A.
BARCELONA

Esta edición se publica en colaboración
con la Cátedra Ferrater Mora
de Pensamiento Contemporáneo
de la Universitat de Girona

Traducción de
JOAN PAGÈS

1.ª edición: octubre 1994

© 1994: Cátedra Ferrater Mora
de Pensamiento Contemporáneo

Derechos exclusivos de edición en castellano
reservados para todo el mundo
y propiedad de la traducción:
© 1994: Editorial Ariel, S. A.
Córcega, 270 - 08008 Barcelona

ISBN: 84-344-1122-9

Depósito legal: B. 33.296 - 1994

Impreso en España

SUMARIO

Introducción

1. La matemática: técnica, arte, filosofía y ciencia
2. El nacimiento de la matemática
3. La Edad Media. El año 1000. Gerberto de Aurillac
4. El Renacimiento. Tartaglia y los desafíos matemáticos
5. La Edad Moderna. Copérnico y Kepler. La Ciencia Nueva de Galileo. Newton y Leibniz
6. Origen y evolución de la teoría de probabilidades
7. La producción matemática: temas y modas
8. Geometría integral. Geometría estocástica
9. Estereología. Tomografía computada

Apéndice
Libros publicados de Lluís A. Santaló
Índice onomástico

INTRODUCCIÓN

En este volumen se presenta el contenido del ciclo de conferencias impartidas en el seno de la *Càtedra «Ferrater Mora» de Pensament Contemporani* de la *Universitat de Girona*, del 4 al 15 de noviembre de 1991, gracias a la amable invitación de su director, el profesor Josep-Maria Terricabras.

A lo largo de estas páginas he intentado desarrollar la evolución histórica general de las ideas matemáticas, siempre desde su doble aspecto de filosofía y técnica, que caracteriza a este saber que denominamos matemática; un saber, por cierto, que siempre se ha hallado entre el pensar y el obrar, entre el verbo y la acción. Más adelante, cuando la matemática de los siglos XIX y XX se ramifica de una manera extraordinaria y resulta difícil hallar puntos de vista unificadores, he concentrado mi estudio en algunos conocimientos especiales de los campos de la geometría y de las probabilidades en los que he trabajado personalmente. Pienso que estos conocimientos pueden ser un buen ejemplo de la diversidad de temas que configuran el pensamiento matemático actual, tanto por su aspecto filosófico de elucubración intelectual como por su aspecto técnico de resolución de problemas de la vida diaria.

Las conferencias siempre fueron acompañadas de los comentarios hechos por los asistentes, a los cuales quisiera expresar mi gratitud, sobre todo por la gran influencia que tuvieron en la preparación de mis siguientes conferencias. Como invitados especiales, asistieron y colaboraron los profesores F. Affentranger (Friburgo), L. M. Cruz Orive (Berna), A. Martínez Naveira (Valencia) y E. Ortiz (Londres), con quienes tuve la oportunidad de intercambiar puntos de vista. Por su parte, y a modo de complemento de las con-

ferencias, los mencionados profesores debatieron sobre el estado actual de la matemática, cada uno a partir de la experiencia adquirida en su respectiva especialidad. Fue también un placer participar al lado de los profesores Claudi Alsina (Barcelona) y Enric Trillas (Madrid), en el ciclo de conferencias sobre *La Matemàtica d'ahir, avui i demà,** organizado por el Centro Cultural «La Mercè» del Ayuntamiento de Girona. A lo largo de estas sesiones se consideró el problema, siempre vigente, de la enseñanza de la matemática a las nuevas generaciones, de modo que pueden ser consideradas como un complemento, para un público más amplio, del curso de la *Càtedra «Ferrater Mora»*.

Deseo agradecer a la *Universitat de Girona,* a todos los colaboradores de la *Càtedra «Ferrater Mora»*, y, de manera especial, a su director Josep-Maria Terricabras, las amables atenciones que de ellos recibí, así como la oportunidad que me brindaron de pasar unos días inolvidables en Girona, mi ciudad natal, de reencontrarme con muchos antiguos amigos y de trabar nuevas y cordiales amistades.

LLUÍS A. SANTALÓ

* *La Matemática de ayer, hoy y mañana.*

CAPÍTULO 1

LA MATEMÁTICA: TÉCNICA, ARTE, FILOSOFÍA Y CIENCIA

1. La matemática

La matemática es una rama del conocimiento acerca de la cual prácticamente todo el mundo tiene una idea formada. No obstante, esta idea no es la misma para todo el mundo. Para quienes tan sólo recuerdan la matemática que aprendieron en la escuela primaria, la matemática se halla integrada por los cálculos aritméticos comunes y por los nombres y las propiedades de algunas figuras geométricas. Para ellos, la matemática consiste en las cuatro operaciones con números enteros o con fracciones, necesarias para resolver los problemas de regla de tres, porcentajes, repartos proporcionales, o en sus aplicaciones para calcular áreas y volúmenes. Para ellos, saber matemáticas es saber calcular y, por consiguiente, con la aparición de las calculadoras electrónicas, que hacen inútil la habilidad de cálculo, consideran que la matemática ha perdido ya su interés y que cada día es menos necesario aprenderla en la escuela. Ahora bien, dado que la supresión de la matemática en la escuela produciría cierto vacío —vacío que provoca el horror clásico—, opinan que la mejor solución es no permitir el uso de las calculadoras en la escuela, con el objeto de que los alumnos continúen calculando como siempre se ha hecho.

Para las personas que han cursado estudios secundarios, la matemática ya es algo diferente. Son matemáticas las ecuaciones, los axiomas, los teoremas, los logaritmos y otras cosas que tuvieron que estudiar en su época, a pesar de que la mayoría nunca ha sabido para qué debía hacerlo, aparte de la mera razón de tener que aprobar la asignatura.

Aquellos que cursaron estudios superiores incluyen en su concepto de matemática otros contenidos útiles para su profesión, como bien pueden serlo la estadística, el cálculo infinitesimal, o ciertas teorías, como la teoría de la decisión o la teoría de la información.

Esta diversidad de conceptos acerca de lo que se entiende por matemática dificulta, y tal vez imposibilita, definirla con precisión. Años atrás, O. Veblen y J. H. C. Whitehead ofrecieron, refiriéndose a la geometría, la siguiente definición, que nosotros extrapolamos aquí a toda la matemática: «Una rama del conocimiento se llama matemática por el hecho de que el nombre parece apropiado, por razones emocionales o tradicionales, a un número suficiente de personas competentes» («The Foundations of Differential Geometry», *Cambridge Tracts in Mathematics*, n.º 29, 1932, p. 17).

Aunque pueda parecer una humorada, esta definición es la que se utiliza en la práctica. Mientras que, para los que sólo conocen la matemática elemental, las personas competentes son aquellas que fueron sus maestros y profesores, para los matemáticos profesionales lo son los responsables de las revistas de crítica bibliográfica universalmente aceptadas, como la *Mathematical Reviews*, de Estados Unidos, o la *Zentralblatt für Mathematik*, de Alemania. Todos los artículos mencionados o analizados en estas revistas pertenecen, por definición, a la matemática, y aquellos que no aparecen mencionados, aunque sea por omisión, no pueden ser considerados como matemática, pues, al no ser reconocidos por la comunidad matemática, es como si no existieran.

La dificultad de ofrecer una definición puramente objetiva de la matemática se asemeja a la que presentan otras ramas del conocimiento. Ortega y Gasset decía que la definición más verídica que de la filosofía se puede dar es que ésta es «una ocupación a la que el hombre occidental se sintió forzado desde el siglo VI a. C. y que con extraña continuidad sigue ejercitando hasta la fecha actual» (prólogo a la *Historia de la Filosofía,* de E. Bréhier, Sudamericana, Buenos Aires, 1942). Sin cambiar nada, lo mismo podría decirse de la matemática.

Aun prescindiendo de una definición precisa y considerando que los límites del conjunto de toda la matemática con las otras ramas del conocimiento son forzosamente borrosos, conviene analizar algunas características que permitan explicar, por su variedad y exten-

sión, el fenómeno notable de la permanencia, a través de los tiempos, de la matemática, tanto en la enseñanza como en la obra creadora de muchos hombres.

2. La matemática como técnica

La parte más visible de la matemática la constituyen sus aplicaciones prácticas y su necesidad para la técnica. Para conocer la naturaleza, el hombre necesita contar y medir. Necesita los números y sus operaciones para las transacciones comerciales y para las construcciones de edificios, máquinas y herramientas. En la época moderna, toda la técnica, al complicarse, ha necesitado continuamente nuevos elementos matemáticos, así como un análisis y un tratamiento más cuidadoso de éstos. La idea de la matemática como construcción acabada, inamovible y eterna (que es la que reciben todos los alumnos desde sus primeros años escolares) ha ido desapareciendo ante el rápido progreso y los incesantes cambios en el modo de vivir. Se ha observado que el edificio matemático está en continua evolución y que sus partes necesitan una remodelación constante para poder seguir siendo útiles en las tareas y los problemas cotidianos. Desde los niveles más elementales, los textos han cambiado tanto en la presentación como en el contenido. Se añaden nuevos capítulos y se altera el énfasis puesto en los problemas.

La particularidad más importante de la matemática es que nos permite predecir. Es decir, que a través de sucesivos razonamientos lógicos —esto es, por medio de cálculos matemáticos— se alcanzan resultados que están de acuerdo con el proceder de la naturaleza y sus fenómenos. Por ello se ha dicho muchas veces que Dios es matemático, o que actúa como si lo fuera, con el objeto de dar a entender que ha conferido unidad a todo lo creado y que, por tanto, nuestra razón, bien conducida, tiene que descubrir las leyes naturales. De ahí que sin la matemática no sería posible el avance tecnológico. El método experimental, que desde Galileo (1564-1642) ha sido fundamental para descubrir las leyes que rigen el universo, no es suficiente por sí mismo para deducir las consecuencias de esas leyes o buscar sus aplicaciones. En la mayoría de los casos, la inmensidad de caminos a elegir en cada momento hace inviable

la determinación, por vía experimental, de cuál es el que conviene o es necesario escoger. No hubiera sido posible llegar a la Luna experimentando con distintos vehículos y modificándolos a partir de correcciones en ensayos sucesivos; por contra, fue imprescindible el uso de la matemática para calcular exactamente la manera de llegar y las fuerzas necesarias para regresar, si bien otras ciencias también contribuyeron suministrando los materiales y el combustible necesarios a tal efecto. Lo mismo sucede con la construcción y puesta en órbita de los satélites artificiales y con las grandes obras de ingeniería, como la construcción de un túnel bajo el Canal de la Mancha, la de una central de energía atómica, o el diseño de un tomógrafo computado.

Incluso en las ciencias humanas son necesarias ciertas técnicas matemáticas para decidir si las encuestas estadísticas y los experimentos psicológicos o sociales son fiables o no.

3. La matemática y el arte

Una de las características del arte es la creatividad. Suele decirse —aunque la diferencia no sea demasiado explícita— que el artista crea y que el científico descubre. Así, las obras de arte no habrían existido nunca sin el artista que las creó, mientras que los descubrimientos científicos se habrían realizado tarde o temprano. Por ejemplo, *La Gioconda* no habría existido nunca sin Leonardo (1452-1519), ni *La Pietà* sin Miguel Ángel (1475-1564), ni *Las Meninas* sin Velázquez (1599-1660), ni el *Himno a la Alegría* sin Beethoven (1770-1827). En cambio, el bacilo de la tuberculosis ya existía cuando Koch (1843-1910) lo descubrió, como ya existía la electricidad antes de Volta (1745-1827) y la energía atómica antes de Fermi (1901-1954), de manera que sus contribuciones al campo de la ciencia no fueron creaciones, sino descubrimientos.

La matemática participa de ambos aspectos. Por ejemplo, los cinco poliedros regulares han existido siempre, y los griegos no hicieron sino descubrirlos. Igual que los números primos, los números irracionales o los conjuntos fractales. Sin embargo, las teorías construidas sobre sistemas axiomáticos son más bien creaciones, en tanto que estos sistemas han sido escogidos libremente por el mate-

mático creador. Muchas teorías matemáticas son creaciones libres en el mundo de las ideas, pese a que la lógica impone sus restricciones, así como la estética impone sus restricciones a las bellas artes. De modo que mucha matemática es arte, en tanto que es creación e, incluso, en tanto que posee belleza, aunque la matemática tan sólo puede ser admirada por los iniciados, como sucede también con las obras de arte y la literatura.

Dejando de lado la cuestión de si la matemática en sí es un arte o, incluso, una bella arte, es indudable que ha intervenido en muchas creaciones artísticas y que se pueden observar, más o menos ocultas, ideas y métodos de la matemática en muchas obras plásticas. Se podrían citar varios ejemplos. La razón áurea,[1] tan estudiada por Luca Paccioli (1445-1514) en su *Divina Proportione*, y también por Leonardo da Vinci, ha prestado un gran servicio en diferentes épocas, tanto a la arquitectura (desde la Grecia clásica y los consejos de Vitrubio —siglo I a. C.— de no descuidar la semejanza en la composición de las distintas partes, ni la de éstas con el todo) como en la pintura, en las proporciones de los cuadros y de sus figuras. A lo largo de los siglos, las proporciones áureas también han sido tenidas en cuenta en la tipografía de los libros, por lo que respecta a la forma de las páginas y a las proporciones entre los márgenes y la parte del texto, con el objeto de embellecerlos. Respecto a este tema, puede consultarse la obra de Lagerstrom, *Tipografía del libro* (Estocolmo, 1950).

Varios autores han estudiado diversas aplicaciones de la matemática a la estética, como las que resultan de asignar una medida estética a las obras de arte (incluso a las obras musicales). Uno de los libros tal vez más interesantes al respecto —puesto que su autor es un gran matemático— es el de George Birkhoff, *Aesthetic Measure* (Harvard University, 1933).

En muchos ornamentos y mosaicos de la Alhambra de Granada se han hallado, en su esencia, los diecisiete grupos cristalográficos que fueron descubiertos en el marco de la teoría de grupos finitos por E. Fedorov en 1891 e, independientemente, por G. Polya en

1. Decimos que dos segmentos, como puedan ser los dos lados de un rectángulo, están en la razón áurea, o divina proporción, si el mayor es igual al producto del menor por el número $(1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}618$.

1924. Cada uno de estos grupos permite la división en celdas congruentes que, agrupadas y coloreadas convenientemente, dieron lugar a los mosaicos clásicos y sirvieron de inspiración para sus famosos cuadros al pintor holandés M. C. Escher (1898-1972), tan interesantes desde el punto de vista artístico como del matemático. Respecto a los grupos cristalográficos y a los mosaicos de la Alhambra, son interesantes los trabajos de Montesinos Amilibia (*Memorias de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*, 1987) y de Pérez Gómez (*Comp. Math. Appl.*, 1987).

La matemática interviene en la pintura y, a su vez, la pintura estimula a la matemática a través de la perspectiva que, iniciada por Piero della Francesca (1416-1492) y Albrecht Durero (1471-1528), dio origen a la geometría proyectiva. Muchos pintores han aplicado la matemática al usar las reglas geométricas de la perspectiva, que son parte de la geometría proyectiva. Baste citar entre los contemporáneos a Salvador Dalí (1904-1989): el dodecaedro que preside su *Última Cena* es un modelo de precisión perspectiva; además, las dimensiones mismas del cuadro están en la razón áurea (o divina proporción).

En la actualidad, entre los fractales de Mandelbrot, de creación matemática pura, hallamos figuras de un valor estético indudable (véase H. O. Peitgen y P. H. Richter, *The Beauty of Fractals*, Springer, Berlín, 1986).

4. La matemática y la magia

El hecho doble de que la matemática sea una abstracción del mundo sensible y de que en ella se hagan elucubraciones en el mundo de las ideas —es decir, el tránsito que hay de la matemática-instrumento a la matemática-filosofía— ha resultado muy importante para esta ciencia. Efectuar ese tránsito obligó a crear cierto lenguaje con simbolismos especiales, a través de los cuales resultó fácil extrapolar y dejarse llevar por la fantasía, el mito y la superstición. Una vez vistos tanto el poder de la matemática para descubrir y predecir hechos reales nada intuitivos —como la existencia de los irracionales, el teorema de Pitágoras o la cuadratura de las lúnulas de Hipócrates— como las dificultades de sus problemas clá-

sicos —como la duplicación del cubo— y la posibilidad de predecir fenómenos astronómicos o de medir el radio de la Tierra (Eratóstenes, siglo III a. C.), se fue creando un ambiente adecuado para intentar utilizar la matemática para predecir el futuro, para simbolizar caracteres y relaciones humanas y hasta para influir sobre los procesos naturales.

Los pitagóricos (siglo VII a. C.) establecieron la teoría de que todo era representable por medio de los números. De esto dedujeron propiedades de los mismos números, que posiblemente tuvieron su origen en civilizaciones anteriores, mezcladas con ritos religiosos y creencias sobrenaturales.

Así, la unidad (o número uno) era la mónada en que reside todo lo inteligible y el espíritu de lo bello y de lo bueno, indivisible e inmutable. En el *Martín Fierro*, de José Hernández (1834-1886), que relata la vida e idiosincrasia del gaucho argentino, se dice: «Dios creó la unidad, lo demás es obra del hombre, así que comenzó a contar.»

El número dos simbolizaba la dualidad entre el bien y el mal, la luz y la oscuridad, el hombre y la mujer. En la literatura china, el dos es el *yang* (masculino, luz, cielo, movimiento) y el *yin* (femenino, oscuridad, Tierra, reposo).

El número tres es el primero que tiene principio, medio y fin. En muchas religiones y ritos, la trinidad juega un papel preponderante. (Uno, inteligencia, alma. Ser, vida, inteligencia.)

El número cuatro engendraba la década ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$) y es el primero que es un cuadrado ($2 \cdot 2 = 4$). (Para los pitagóricos, el uno no era un número, en tanto que no representaba una cantidad.) Los pitagóricos juraban por el cuatro, que simbolizaba la justicia al ser el producto de dos factores iguales entre sí. Todo era combinación de cuatro elementos: tierra, fuego, aire y agua.

El número cinco representaba el matrimonio, unión del primer número masculino (el tres) y el primer número femenino (el dos).

El número seis era el de los días necesarios para la Creación. Repetido tres veces es el número 666 de la Bestia del Apocalipsis, símbolo de maleficio.

El número siete es el que más significados ha tenido a lo largo de la historia. Para los griegos simbolizaba la salud, el sueño, el canto (las siete notas musicales) y también a Atenea, la diosa que

ni era ni tenía madre, ya que el siete no engendra ningún número de la primera década ni es engendrado por ninguno de ellos. El número siete es el de los pecados capitales y las plagas de Egipto, y aparece en numerosas ocasiones en el Apocalipsis (siete candelabros, siete trompetas, siete cabezas de la Bestia), así como en el inventario de las cosas importantes (siete sabios de Grecia, siete maravillas del mundo). Recientemente, el siete ha resultado ser el número de catástrofes elementales de René Thom, razón por la que, tal vez, llamaron tanto la atención a los no matemáticos.

Los números sagrados de los pitagóricos eran: 3, 4, 7, 10, 12 y 40, los cuales han aparecido con frecuencia, en diferentes modalidades, en las ciencias ocultas y en las artes mágicas.

También se estudiaron ciertas clases de números a los que se dieron nombres que simbolizaban propiedades afectivas vinculadas a las relaciones humanas. De esta manera aparecieron los números *perfectos*, iguales a la suma de sus divisores, como $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, y, análogamente, 496 y 8.128. No se sabe si existen números perfectos impares, pero caso de haberlos, tendrían que ser mayores que la unidad seguida de dieciocho ceros. Hay números perfectos pares tan grandes como uno desee. Los números *amigos* son aquellos que son iguales a la suma de los divisores de los otros; por ejemplo, los pares 220 y 284, y también 17.296 y 18.416. Los números *abundantes* son los menores que la suma de sus divisores, mientras que los números *deficientes* son los mayores que la suma de sus divisores. Otros tipos de números provienen de la forma en que se pueden agrupar los puntos que los representan, como los números *triangulares* (1, 3, 6, 10...), los números *cuadrados* (1, 4, 9, 16...), los números *pentagonales* (1, 6, 16...), etcétera.

Los números primos son bastante conocidos y han sido muy bien estudiados. Desde Euclides se sabe que son infinitos, pero hasta el año 1989, el mayor número primo conocido era $2^{215091} - 1$, que tiene 65.050 cifras. En los últimos años se ha investigado profusamente, mediante computadoras, sobre números primos muy grandes, del orden de cien o más cifras, que han resultado muy útiles en criptografía, por la gran complejidad que supone descomponer los números muy grandes en sus factores primos, aun con las computadoras más rápidas. No se conoce ninguna función que genere sólo

números primos. Es obvio que, caso que existiera, no podría ser un polinomio, aunque a veces se han dado ejemplos como $x^2 - x + 41$, que genera números primos para $x = 1, 2, 3..., 40$, pero para $x = 41$ el resultado, evidentemente, no es primo. Dos números impares consecutivos y primos se llaman *gemelos*, por ejemplo: (3, 5), (5, 7), (11, 13)... Se conocen pares de gemelos muy grandes, pero todavía no se sabe si hay infinitos. Otra conjetura famosa no resuelta es la de Goldbach (1742), que afirma que todo número natural par se puede expresar como la suma de dos números primos impares (incluido el uno).

A veces se han atribuido significados ocultos a ciertos números que aparecen en las Escrituras, o en otros libros antiguos. Así, el 666 es el número de la Bestia del Apocalipsis, considerado maléfico. El número 153 es el número de peces que el apóstol Simón Pedro halló en la red, según lo explica San Juan en el versículo 11 del capítulo 23 de su Evangelio. Este número ha resultado ser triangular, puesto que $153 = 1 + 2 + 3 + ... + 17$, y también tiene la notable propiedad de ser igual a la suma de los cubos de sus cifras, es decir, $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$. Es el único número múltiplo de tres con esta propiedad. Números no múltiplos de tres con tal propiedad sólo existen los siguientes: 1, 370, 371 y 407.

Desde la Antigüedad, y sobre todo desde la Edad Media, han tenido muy buena aceptación los llamados *cuadrados mágicos*, formados por números naturales tales que la suma de los números de cada fila y de cada columna, así como la suma de los números de las dos diagonales, siempre tienen el mismo valor. Con los nueve primeros números —simetrías y rotaciones al margen— el único cuadrado mágico construible es:

6	7	2
1	5	9
8	3	4

donde la suma de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es 15. Este cuadrado mágico era conocido también por los mate-

máticos chinos de la Antigüedad. Para ellos, el cinco, que está en el centro, simbolizaba la Tierra, y en los bordes, con la misma cantidad de números pares (femeninos) e impares (masculinos), se hallan, de forma consecutiva, los pares (4, 9) = metal, (2, 7) = fuego, (6, 1) = agua y (8, 3) = madera.

Se pueden construir 880 cuadrados mágicos de orden cuatro, formados con los dieciséis primeros números. Uno de ellos es el siguiente:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

donde la suma de los elementos de cada fila, columna y diagonal vale 34. Este cuadrado mágico es famoso porque figura en el grabado, *La melancolía*, de Albrecht Durero (1514).

El número de cuadrados mágicos de orden 5 es 275.305.224. Por lo que respecta a los cuadrados mágicos, hay todavía muchos problemas por resolver, si bien se consideran meras curiosidades, sin mayor importancia matemática. Por ejemplo, se han estudiado los cuadrados mágicos, cuyos componentes son números primos. (¿Existirán para todo orden?) He aquí un ejemplo de un cuadrado mágico de orden 4, compuesto por números primos acabados en 7:

17	307	127	347
317	157	277	47
397	107	257	37
67	227	137	367

La gran variedad de cuadrados mágicos propició que se les atribuyeran propiedades místicas y que, combinados con fechas relativas a personas o a ciertos sucesos, permitieran hacer incursiones en el porvenir. Pueden verse algunos detalles al respecto en el libro de H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics* (Dober Publications, Nueva York, 1958), y también en Martin Gardner, *Viajes por el tiempo* (Labor, Barcelona, 1988).

El carácter mágico o trascendente que se atribuyó a ciertos aspectos de la matemática provocó, por un lado, que la verdadera matemática progresara, puesto que se hallaron ciertas propiedades de los números de genuino valor. Por otro lado, sin embargo, dio también origen a doctrinas sobre las que se basaron algunos visionarios (a menudo con fines no santos) para adivinar el porvenir o dirigirlo hacia determinados objetivos. Por ello, en distintos períodos de la historia los matemáticos fueron censurados, o sus obras prohibidas. Así, en el derecho romano se condenaba a los matemáticos porque *ars mathematica damnabilis et interdicta est*, y San Agustín (354-430) prevenía de los matemáticos y de aquellos que hacían profecías, puesto que «existe el peligro de que estén vinculados con el Diablo y por ello turben el espíritu y hundan a los hombres en el infierno» (*De Genesi ad Litteram,* 2, XVII, 37).

5. La matemática como filosofía y como ciencia

La filosofía trata de entender y explicar la esencia, propiedades, causas y efectos de las cosas naturales. Sus fines son paralelos a los de la matemática, que en muchos aspectos le sirve de instrumento y, por ello, casi hasta la Edad Moderna, filosofía y matemática se hallaban estrechamente ligadas. Por tradición y naturaleza, la matemática también es filosofía, si bien una filosofía más apta para cuantificar las leyes y los fenómenos naturales, e incluso para dominarlos y encauzarlos en provecho propio.

Son ejemplos de la matemática como filosofía los conceptos de espacio y tiempo. La filosofía nunca hizo tan comprensible la idea de espacio como Maurice Frechet en su tesis sobre los espacios abstractos (1906) y los trabajos sucesivos de los matemáticos Hausdorff (1914) y Banach (1932). Einstein y Minkowski, con sus geometrías

del espacio-tiempo, aportaron claridad y bases sólidas a teorías filosóficas sobre los conceptos fundamentales de espacio y tiempo. Los límites de la matemática con el resto de las ciencias son imprecisos y dependen de la formación de cada uno. Cuando, en 1888, David Hilbert demostró sus teoremas sobre la teoría de los invariantes, el matemático Gordan exclamó: «esto no es matemática, es teología».

La matemática se distingue de la filosofía porque es, al mismo tiempo, una ciencia. Si por ciencia se entiende un conjunto sistematizado de conocimientos, que constituyen una rama del saber humano, la matemática es la ciencia por excelencia. Ha sido considerada como la base de las llamadas ciencias exactas —para distinguirlas de las ciencias naturales—. En realidad, la idea de que las matemáticas son exactas, que prevaleció hasta el presente siglo, se ha ido desvaneciendo con la incorporación de las probabilidades y la estadística, y por la necesidad de considerar y tratar conceptos aleatorios o con un cierto margen de ambigüedad, como los llamados conjuntos borrosos. Actualmente, el nombre clásico de las Facultades de Ciencias Exactas tiende a ser el de Facultades de Matemáticas. La exactitud se ha ido perdiendo en los objetivos o en los resultados de la matemática, aunque todavía se conserva, naturalmente, en sus razonamientos. Los siglos XVIII y XIX fueron de gran éxito para la mecánica celeste, ciencia exacta por excelencia, pero, en el siglo XX, la matemática ha iniciado el estudio de fenómenos y problemas menos exactos (aunque igualmente susceptibles de ser tratados rigurosamente, vía matemática), como los procesos estocásticos, la reconstrucción de imágenes, las teorías de la información o el análisis de decisiones.

6. Opiniones sobre la matemática

Entre los no matemáticos ha habido siempre admiradores y detractores de la matemática, a menudo con exageraciones de unos y otros en ambos extremos. Ya hemos mencionado la opinión desfavorable de San Agustín. Siglos más tarde, Goethe (1749-1832) también comentaba, en su obra *Máximas y reflexiones* (1799), que «los matemáticos son como los franceses, se habla con ellos, tra-

ducen lo dicho a su idioma y lo convierten en algo completamente diferente».

Entre los entusiastas cabe mencionar a Leonardo da Vinci (1452-1519), que afirma que «ninguna investigación humana puede ser considerada ciencia verdadera si no está basada en demostraciones matemáticas». Giovanni Pico della Mirandola (1463-1494) afirma que «los números son el camino para buscar y entender todo lo que puede ser conocido». También merece la pena citar a Immanuel Kant (1724-1804), para el cual «en ningún conocimiento natural se halla ciencia verdadera si no interviene la matemática», y al poeta Novalis (Friedrich von Hardenberg, 1772-1801), que comenta en sus *Fragmentos* que «la vida más alta es la matemática. La vida de los dioses es matemática. Todos los mensajes de Dios son a través de la matemática».

El valor de la matemática para explicar la naturaleza ha sido aceptado de forma generalizada desde la Antigüedad y fue reafirmado por Galileo en *Il Saggiatore:* «El libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático, cuyos caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales sería imposible entender una sola palabra y se andaría siempre como en un laberinto oscuro.»

En nuestro siglo XX, sustituyendo triángulos, circunferencias y otras figuras geométricas por entes matemáticos más complicados (como grupos, tensores, espinores, cuerdas, etc.), la matemática se considera también indispensable para comprender la naturaleza, sus partículas y sus fenómenos. La teoría de grupos, llamados, en general, *simetrías* (transformaciones que dejan invariantes ciertos elementos o ecuaciones), es fundamental en toda la física moderna. Werner Heisenberg (1901-1976) afirmaba que «al principio fue la simetría» y, con el único criterio de las simetrías y de los grupos que las representan, buscaba, en 1958, una ecuación única que explicara todas las partículas elementales (teoría unificada de la materia); asimismo, Einstein, alrededor de 1950, hacía públicas sus ecuaciones del campo unificado. Así, la creencia histórica de que la naturaleza, con sus partículas y sus campos de fuerza, puede ser explicada por una o más ecuaciones matemáticas persiste hasta el presente momento.

Después de este panorama general sobre la matemática y sus

diversas características, vamos a analizar su nacimiento y desarrollo hasta la actualidad, en la que será estudiada con especial atención, tanto para contemplar, con la perspectiva del tiempo, todo lo realizado hasta este final del segundo milenio como para realizar una cierta prognosis sobre el porvenir, o, más concretamente, sobre las posibilidades que se vislumbran para el tercer milenio, llamado, en muchos sentidos y con razón, el milenio de la esperanza.

Capítulo 2

EL NACIMIENTO DE LA MATEMÁTICA

1. Babilonia y Egipto

La matemática es tan antigua como el hombre. Desde que el hombre tuvo conocimiento del mundo exterior y de su persona, tuvo que contar y medir, bases de toda la matemática. No se puede fijar una fecha determinada para el origen de la matemática ni se puede atribuir este origen a un hombre excepcional. Ante la tradición griega que atribuía a Palamedes (personaje mitológico) el invento de los números, Platón ironizaba: «¿De manera que Agamenón, antes de Palamedes, no sabía cuántos pies tenía?» (*República*, 522 e).

Los primeros testimonios materiales de la existencia del pensamiento matemático son ciertos dibujos y símbolos trazados sobre ladrillos o tabletas sirias y babilónicas, entre los siglos XXX y XX antes de nuestra era, que fueron en gran parte reunidos en la primera gran biblioteca de la historia, construida por Asurbanipal en la ciudad de Nínive, hacia el siglo VII a. C. Su contenido ha sido la fuente principal para el conocimiento de la matemática siria y babilónica de la Antigüedad. Son los primeros testimonios matemáticos, a partir de los cuales se ha podido deducir, por ejemplo, la existencia de un sistema de numeración de base 60 y algunas operaciones con productos, cuadrados y raíces cuadradas, además de datos astronómicos y construcciones geométricas. Obsérvese que el número 60 subsiste todavía en nuestra medida del tiempo y de los ángulos (cada hora tiene 60 minutos y cada minuto 60 segundos).

Más o menos por la misma época, anterior al primer milenio antes de Cristo, aparecieron en Egipto los primeros documentos

matemáticos, pero, en este caso, con la ventaja de estar escritos sobre papiros (elaborados con hojas de diferentes plantas, secadas y pegadas entre sí), mucho más manejables que las tabletas y, por tanto, más apropiados para conservar y transmitir conocimientos. Disponemos del papiro Golenischev y del papiro Rhind. Este último, que data del siglo XVII, es más conocido que el primero: fue descifrado en 1877 y publicado íntegramente en 1927. El papiro Rhind, cuyo autor fue el escriba Ahmes, recopila toda una colección de problemas y reglas «para escudriñar la naturaleza y llegar a conocer todo lo que existe y todo misterio y todo secreto». Este encabezamiento prueba el poder que se atribuía a la matemática para resolver problemas y desvelar misterios, todo ello circunscrito a un ambiente de ciencia y magia.

El papirus Rhind incluye problemas de diferentes tipos. Unos son de utilidad para el cálculo, como unas tablas que contienen la descomposición de todas las fracciones de numerador 2 y denominador impar desde el 5 hasta el 101, en sumas de fracciones de numerador unidad. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}; \qquad \frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}; \qquad \frac{2}{63} = \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$$

Esta descomposición era importante para efectuar operaciones con fracciones, pero el papiro no dice nada acerca de la manera de obtener las descomposiciones en cuestión (probablemente harían las descomposiciones a base de tanteos sucesivos). Las técnicas derivadas de estas descomposiciones se conservaron a lo largo de los siglos. Leonardo Pisano (Fibonacci), en su libro *Liber Abaci* del año 1202, todavía menciona reglas para obtener descomposiciones como las siguientes:

$$\frac{19}{53} = \frac{1}{3} + \frac{1}{53} + \frac{1}{159}; \qquad \frac{5}{23} = \frac{1}{5} + \frac{1}{58} + \frac{1}{6670}$$

A este respecto, todavía hay problemas no resueltos, como, por ejemplo, saber si todo número racional entre el 0 y el 1 con denominador impar es una suma de fracciones con numerador 1 y denominador impar.

Hay que observar que la descomposición no es única, por ejemplo:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{140}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$$

Hay que notar, también, que con esta representación no es fácil saber si un número es mayor o menor que otro. Otros problemas del papiro Rhind se refieren a repartos proporcionales, así como al cálculo de áreas y volúmenes elementales. Algunos de ellos parecen surgir de aplicaciones prácticas, como el que trata de descomponer un área de cien unidades en dos cuadrados cuyos lados estén en la proporción de 1 a 3/4 (la solución es un cuadrado de lado 8 y otro de lado 6), pero otros son más bien curiosidades de cálculo. Es interesante señalar este aspecto para ver que, desde antiguo, la curiosidad por la resolución de problemas de ingenio ha sido un factor que ha contribuido a la creación matemática, tanto o más que las aplicaciones prácticas posibles de la matemática.

Por ejemplo, en el papiro Rhind se halla el siguiente problema: había siete personas, cada una con siete gatos, cada gato se había comido siete ratones, cada cual de ellos se había comido siete espigas que contenían siete granos cada una. Se trata de calcular el número de gatos, ratones, espigas y granos. Es un sencillo problema para practicar la multiplicación por siete, pero que motivó el interés de muchas personas a través de generaciones. El mismo problema, en una forma un tanto distinta, se halla en el *Liber Abaci*, de Leonardo Pisano, mencionado antes, en el que se habla de siete ancianas que van a Roma, cada una con siete mulas, cada una con siete bolsas, que contienen siete panes cada una, cada pan acompañado por siete estuches, y cada estuche por siete cuchillos, y se nos pide el número de mulas, bolsas, panes, estuches y cuchillos.

De la información contenida en los documentos hallados se ha podido deducir que los antiguos egipcios (siglo XX a. C., o antes) conocían la propiedad de los números 3, 4 y 5 de ser lados de un triángulo rectángulo (caso particular del teorema de Pitágoras), y a partir del estudio de las pirámides y del calendario, como también de otros datos astronómicos, se ha descubierto que atribuían al número π (razón de la circunferencia respecto al diámetro) el valor

racional 256/81 = 3,1604, que es bastante aproximado. Hay que tener en consideración que sólo conocían los números racionales y que algunos de éstos tenían propiedades que hacían que apareciesen con más frecuencia que otros. Por ejemplo, la razón de la altura de la Gran Pirámide (Keops) respecto a la mitad del lado de la base es de (14/11) · (7/18). Estas fracciones aparecen a menudo en el estudio de las medidas de las diferentes partes de las pirámides egipcias y de sus corredores interiores. Se puede consultar, por ejemplo, el artículo de Robins y Schute, «Mathematical Bases of Ancient Egypcian Architecture and Graphic Art», *Historia Mathematica*, vol. 12, 1985, pp. 107-122. Obsérvese que las longitudes dependen de la unidad de medida, pero las razones entre longitudes no dependen de esta unidad, y, por tanto, es lícito suponer que las fracciones que aparecen en las diferentes pirámides (como 14/11 y 7/18) tenían algún significado especial.

En resumen, todo parece indicar que las matemáticas babilónica y egipcia, de antes del primer milenio anterior a nuestra era, eran matemáticas empíricas, usadas como herramienta para el comercio y para las construcciones arquitectónicas, pero también para proponer y resolver problemas ingeniosos como los que hoy se han dado en llamar de *matemática recreativa*, aparte de tener un uso en cálculos astronómicos y en la medición del tiempo, fuera a partir del año solar o de los períodos lunares. Sin embargo, no ha quedado constancia de que existiera el razonamiento matemático, en el sentido actual de ciencia deductiva, con conceptos abstractos y generales. Tal vez esta matemática existió, pero no ha dejado ningún rastro por lo dificultoso de su transmisión, para la cual sólo se disponía de una escritura poco adecuada para expresar pensamientos elaborados. A pesar de ello, no hay duda de que sus adquisiciones matemáticas, empíricas o razonadas, fueron el germen del florecimiento matemático griego alrededor del siglo VII a. C.

2. La matemática en la Grecia clásica

Se considera que el nacimiento de la matemática, en el sentido actual de actividad razonadora y deductiva del pensamiento, se produjo en el siglo VII antes de nuestra era. En este siglo vivió Tales

de Mileto, que probablemente había viajado por Egipto y había tomado contacto con los escribas y calculistas de la época, de los que aprendió su matemática, con sus realizaciones prácticas y sus vinculaciones con la astronomía, la religión y la magia. Se cuenta que, comparando la sombra de un bastón y la sombra de las pirámides, midió, por semejanza, las alturas respectivas. La proporcionalidad entre los segmentos que las rectas paralelas determinan en otras rectas originó lo que todavía hoy se conoce como el *teorema de Tales.* En este punto se puede marcar el límite simbólico del comienzo de la matemática, puesto que ya se efectúan generalizaciones de la realidad conocida a posibilidades desconocidas.

Aproximadamente en la misma época nació la escuela pitagórica, que siguió y extendió la doctrina de Filolao: «Todo lo que se conoce tiene un número, sin el cual nada puede comprenderse o conocerse.» Esto supone que cualquier magnitud, una vez elegida una unidad determinada, puede ser representada por un número, que constituye su medida. Si la medida no es un número entero, se tomará como nueva unidad una parte alícuota de la primera, y la medida será un número racional. Todo esto funcionó mientras se mantuvo restringido al mundo experimental, en el cual, si se tomaba una unidad suficientemente pequeña, toda magnitud tenía como medida un número exacto, dentro de la aproximación que era posible apreciar de modo empírico. Pero los propios pitagóricos, con sus especulaciones precisas y profundas, llegaron a descubrir los irracionales. El ejemplo típico, tal vez el primero, fue la diagonal del cuadrado de lado uno, que nunca contiene un número exacto de veces una parte alícuota cualquiera de la unidad, por pequeña que ésta sea. La doctrina se vino abajo, pero del derrumbamiento se elevó, luminosa y eterna, la matemática, en el sentido en que se ha entendido hasta el presente, como una obra del espíritu elaborada en el mundo de las ideas.

La imposibilidad de comprobar experimentalmente ciertos resultados geométricos hizo que la geometría se fuera desvinculando de la observación experimental e iniciara su carrera como «arte de obtener resultados ciertos, razonando sobre figuras mal hechas». Se estudiaba sobre figuras dibujadas sobre la arena, forzosamente imprecisas, pero se razonaba sobre ellas llegando a resultados de validez universal, y haciendo innecesaria cualquier comprobación experimental.

El descubrimiento de los irracionales fue el hecho más relevante de la matemática griega. En general, se desconfiaba de los sentidos, de manera que se desarrolló la demostración lógica de los enunciados. Desde entonces, no se ha aceptado nada como válido si no ha ido acompañado de su *demostración*, poniendo de manifiesto el poder de la razón para demostrar hechos incomprobables por otros medios. Se demostró el teorema de Pitágoras, pero no a partir de comprobaciones, en muchos casos particulares, sino ofreciendo una demostración del mismo que lo hacía válido para todos los triángulos rectángulos posibles. Se definieron los números primos, y Euclides demostró que había infinitos (siglo III a. C.), aunque por la carencia de un sistema de numeración adecuado le habría resultado difícil dar ejemplos de números primos relativamente grandes (por ejemplo, superiores a un millón). Debe advertirse que para los griegos los números superiores a diez mil eran ya prácticamente inmanejables por sus métodos de cálculo rudimentarios y enojosos.

Para poner de manifiesto la diferencia entre la matemática griega y las anteriores, egipcia o babilónica, bastará con recordar los tres problemas clásicos que tanto preocuparon a los griegos y a generaciones posteriores; problemas que, sin embargo, habrían resultado incomprensibles para los egipcios o para cualquier otra civilización basada en la experimentación, porque su solución práctica hasta la aproximación deseada es trivial y carente de interés. Son problemas de carácter meramente intelectual, planteados a partir de especulaciones teóricas profundas, que nada tenían que ver con las necesidades prácticas, para las cuales la solución está (estaba ya desde el principio) al alcance de cualquiera. Es interesante recordar estos tres problemas.

El problema de tradición más antigua (y que, en cierta manera, fue un regalo de los dioses) fue el de la *duplicación del cubo.* Eudoxio de Ascalón (siglo V a. C.) refiere dos versiones de su origen. Según la primera, el legendario rey Minos de Creta mandó construir una tumba de forma cúbica para su hijo Glauco, y, al verla acabada, le pareció pequeña y ordenó su duplicación. Según una segunda versión, los habitantes de Delos recibieron la orden del Oráculo de duplicar el altar de oro —de forma cúbica— dedicado a Apolo, con el objeto de satisfacer al dios después de una peste. En ambos casos, se presentó el problema de calcular el lado de un

cubo que tuviera doble volumen que otro previamente dado. Se sobreentendía, como en toda la matemática de la época, que el lado que se buscaba debería ser obtenido a partir del primitivo por construcciones geométricas que hicieran uso tan sólo de la regla y el compás, pero no de instrumentos que pudieran haber sido construidos especialmente para el problema. Aceptando aproximaciones, la solución del problema era trivial, y mediante unas curvas especiales se obtuvieron muchas soluciones, que ciertamente no resolvieron el problema pero que contribuyeron, sin embargo, al avance de la geometría. Por ejemplo, Arquitas y Eudoxio ofrecieron soluciones a partir de las intersecciones de figuras en el espacio (cilindros, conos y toros). La imposibilidad de resolver el problema sólo se pudo demostrar muchos siglos después, cuando Fermat y Descartes crearon la geometría en coordenadas (siglo XVII), transformando el problema geométrico en un problema algebraico (solución mediante raíces cuadradas de la ecuación $x^3 = 2$).

El segundo problema clásico fue el de la *trisección del ángulo*. Desde el siglo V a. C. llamó la atención la dificultad de dividir un ángulo en tres partes iguales, utilizando tan sólo la regla y el compás, lo que contrastaba con la facilidad de dividirlo en 2, 4, 8..., partes iguales. En este caso también se dieron soluciones mediante curvas especiales (por ejemplo, la concoide de Nicomedes, siglo III a. C.), pero la imposibilidad de hacerlo con regla y compás sólo se pudo demostrar, tal y como sucedió con la duplicación del cubo, cuando se dispuso de la geometría analítica, que transformaba el problema, de nuevo, en la solución de raíces cuadradas de una ecuación de tercer grado.

Finalmente, el tercer problema clásico fue el de la *cuadratura del círculo*, que consistía en dibujar, sólo con regla y compás, un cuadrado con la misma área que un círculo dado. Llamaba la atención que no se pudiera resolver con facilidad, sobre todo porque se podían resolver fácilmente figuras más complicadas con una simple aplicación del teorema de Pitágoras (como las lúnulas de Hipócrates de Quío, siglo III a. C.). La cuadratura del círculo preocupó a muchas generaciones de matemáticos y de aficionados a la matemática, que a menudo la estudiaban sin entender de qué se trataba, ofreciendo soluciones aparentes, triviales y sin sentido. La imposibilidad de la cuadratura del círculo fue plenamente probada en 1882

por el alemán Lindemann (1852-1939), al demostrar la trascendencia del número π, lo que quiere decir que π no puede ser raíz de ninguna ecuación algebraica de coeficientes enteros, mientras que, por otro lado, cualquier construcción con regla y compás equivale, algebraicamente, a la solución de ecuaciones algebraicas.

Estos problemas son la prueba evidente de la revolución que supuso para la historia del pensamiento el paso de la matemática empírica, dedicada a resolver problemas prácticos, a la matemática como estructura del pensamiento, con problemas puramente ideales, verdaderos virtuosismos en el mundo de las ideas, propios de filósofos y pensadores. Estos problemas, a pesar de la fragilidad que les confería la propia dificultad conceptual, se difundieron por la sociedad, perduraron a través de los siglos y sirvieron de valioso estímulo para el desarrollo de la matemática como un estilo de pensamiento que resultó de gran utilidad, tanto para la comprensión del mundo como para la comprensión de su manera de evolucionar.

3. La matemática en la educación: Platón (428-348 a. C.) y la *República*

Si comparamos la matemática egipcia y babilónica, de los siglos posteriores al primer milenio anterior a nuestra era, con la matemática de los griegos, a partir del siglo VII a. C., se ponen de manifiesto, claramente, los dos aspectos que presentó la matemática desde sus orígenes y que ha mantenido hasta el presente. Por un lado, hallamos la matemática empírica; es decir, la matemática como herramienta para los problemas prácticos de la vida, incluidos los problemas en que esta aplicabilidad es tan sólo aparente, como en las adivinanzas y los problemas de ingenio propuestos solamente para entretener a algunos espíritus. Por otro lado, tenemos la matemática como filosofía, que plantea e intenta resolver problemas nacidos de creaciones en el mundo de las ideas o de la abstracción o generalización de situaciones reales particulares. Sin embargo, la aceptación o rechazo de sus soluciones debía obtenerse por medio de razonamientos y deducciones lógicas, puesto que no era posible ningún tipo de comprobación experimental. Estos dos aspectos, co-

nocidos actualmente como *matemática aplicada* y *matemática pura*, fueron claves y estuvieron bien delimitados en los primeros tiempos, pero más tarde se fueron imbricando y sus fronteras se volvieron cada vez más borrosas, hasta la actualidad, momento en que la matemática forma una unidad, como un todo perfecto, de manera que su variedad de matices no alcanza a romper la conexión del edificio.

El carácter práctico de la matemática egipcia hizo que ésta siempre fuera considerada como una matemática útil para las realizaciones humanas, ya fuese para construir viviendas u otras obras públicas, o para las transacciones comerciales. Cada oficio o artesanía necesitaba de una matemática propia que fuera enseñada con un cuidado especial para las tareas del aprendizaje. La matemática pura, iniciada por Tales y Pitágoras, se situó a otro nivel y se cultivaba en los centros aristocráticos de filósofos o entre sectas religiosas, en los cuales los problemas se presentaban como especulaciones del espíritu y, a veces, como mandamientos de los dioses, como en el caso de la duplicación del cubo.

Según el papiro Rhind de Ahmes, la matemática servía para «escudriñar la naturaleza y llegar a conocer todo lo que existe», es decir, para entender el mundo exterior y actuar sobre él, mientras que entre los fines enunciados por Platón (siglo IV a. C.) hallamos el de «otorgar al alma un movimiento que la eleve desde el día de las tinieblas hasta el día verdadero, es decir, hasta el ser» (la *República,* 521 c). La matemática pura sirve para cultivar el interior del hombre y satisfacer sus ansias intelectuales, de manera que su única finalidad, como diría muchos siglos más tarde Jacobi (1804-1851), es *el honor del espíritu humano.*

Para Platón, la única matemática que debía ser objeto de estudio era aquella que se propusiera «elevar el conocimiento del alma hasta el conocimiento del bien [...], una ciencia de la cual ningún arte ni ningún conocimiento pudiera prescindir [...], conocimiento indispensable para aquel que quiera ser hombre» (522 a, c, e). La otra matemática, la de los «mercaderes y traficantes que la cultivan con la vista puesta en las compras y las ventas», es soslayada, como una herramienta para los trabajos manuales, ajena a los centros académicos y a la filosofía.

Este pensamiento de Platón sobre la matemática es importan-

te y fue fundamental para todo su desarrollo posterior. Cabe afirmar que la enseñanza de la matemática durante los siglos siguientes estuvo marcada por este concepto de pureza y de creación interior imprimidos por Platón en el siglo IV a. C. En la *República*, al discurrir con Glaucón, por boca de Sócrates, sobre cuál era la preparación más adecuada para los futuros ciudadanos y sus dirigentes, afirma que, aparte de las artes vulgares, se tiene que recurrir a «una enseñanza que es útil a todas las artes, a todas las formas de razonar, a todas las ciencias y que es imprescindible aprender entre las primeras, y es la que enseña qué es el uno, el dos y el tres, me refiero, al fin y al cabo, a la ciencia de los números y del cálculo...» (522 c). Por tanto, «sería interesante prescribir por ley esta enseñanza y al mismo tiempo convencer a los que tengan que desempeñar las funciones más importantes de la ciudad, de que acometan el estudio del cálculo y de que se dediquen a ello, no de una manera superficial, sino hasta elevarse por medio de la inteligencia pura a la contemplación de la naturaleza de los números y facilitar al alma los medios para elevarse desde la esfera de la generación hasta la verdad y la esencia» (525 c). Por otro lado, Sócrates continúa diciendo: «¿no has observado, además, que los que son calculadores por naturaleza tienen una gran facilidad para todas, o casi todas, las enseñanzas y que, incluso los espíritus tardos, cuando se han educado y ejercitado en el cálculo, aunque no deriven de él ninguna otra ventaja, sí que obtienen al menos el de volverse más sutiles de lo que antes eran?» (526 b). Pero en seguida añade: «siempre que se la estudie [a la matemática] para conocerla y no para fines mercantiles» (526 d).

En relación a la geometría, Platón afirma: «Importa ver si la parte más elevada de esta enseñanza tiende a nuestro principal objetivo, que es el de hacer más fácil la contemplación de la idea del bien; es decir, si la geometría conduce al alma a contemplar la esencia, no hay duda de que nos conviene, pero si se detiene en la generación no nos conviene» (526 e). Por otra parte, «puesto que su conocimiento es el conocimiento de lo que siempre existe y no de lo que nace y muere con el tiempo, y se trata de una enseñanza que atrae al alma hacia la verdad y hace nacer un espíritu filosófico que eleva nuestras miradas a las cosas de lo alto, tendremos que ordenar a los ciudadanos que no se aparten de la geometría [...], tanto más

cuanto hay una diferencia absoluta entre el que es versado en geometría y el que no lo es» (527 b, c).

Toda esta tendencia de Platón hacia la matemática pura, despreciando sus aplicaciones como una cosa vulgar y quizá sobreentendida, puede hallarse en sus textos repetidas veces, como cuando dice: «por lo que a mí respecta, no puedo reconocer otra ciencia que lleve al alma a la contemplación de lo alto que no sea la que tiene por objeto el estudio del ser y lo invisible, y afirmo que cualquiera que intente estudiar las cosas sensibles, jamás llegará a conocerlas, porque ellas no son objeto de conocimiento y su alma no mirará hacia lo alto, sino hacia lo bajo, aunque esté acostado boca arriba sobre la tierra o sobre el mar» (529 b).

4. Euclides y Arquímedes

El gusto exclusivo de Platón por la matemática pura perjudicó, sin duda, a la matemática aplicada o práctica, tal vez de manera obligada, puesto que tampoco se disponía de un sistema de numeración y cálculo manejable, ni de aparatos de observación y precisión con suficiente sensibilidad. Por otro lado, sin embargo, originó un gran florecimiento de la matemática como ciencia deductiva y puso a prueba el poder del entendimiento y de la razón para penetrar la esencia de la naturaleza y de sus fenómenos. Poco después de Platón, en el siglo III a. C., aparecieron los *Elementos* de Euclides, obra cumbre de la matemática, que confirió a la matemática el carácter axiomático y lógico-deductivo que ha poseído hasta el presente.

Hay que observar que el gran valor de los *Elementos* de Euclides radica en su método (hipótesis $\Rightarrow$ tesis $\Rightarrow$ demostración) y en la sistematización de los conocimientos matemáticos de su época. Antes de Euclides ya se conocía mucha matemática y mucha geometría, como las cónicas entendidas como secciones por planos de un cono de revolución (Menecmo, siglo IV a. C.) y todas las reglas del cálculo de áreas y volúmenes, muchas de ellas procedentes del antiguo Egipto. No obstante, la ordenación de Euclides fue fundamental para los desarrollos posteriores, puesto que indicaba el camino adecuado para el avance seguro y la conducción correcta de la

imaginación hacia lo desconocido. El primer fruto de ello fue la obra de Arquímedes (287-212 a. C.), que conjuntó de manera magistral la metodología euclidiana con la inventiva y la audacia necesarias para tratar problemas prácticos y crear nuevas líneas de pensamiento. La pureza de su matemática en las obras *De la esfera y del cilindro, De los conoides y esferoides*, y la originalidad de sus nuevas ideas (método de exhaución, cuadratura del segmento de parábola), en las que se puede ver el germen del futuro cálculo infinitesimal de Newton, se une y se complementa armoniosamente con sus trabajos sobre estática e hidrodinámica, poniendo de manifiesto cómo las dos matemáticas, la pura y la aplicada, se complementan mutuamente, de manera que cada una actúa como estímulo y ayuda para la otra, y forman en conjunto una única y bien definida línea de pensamiento.

Es una lástima que a lo largo de los siglos posteriores esta unidad se separara con frecuencia, manteniendo diferenciada la matemática del pensamiento, pura, y la de la acción, aplicada.

En los cuatro últimos siglos anteriores a nuestra era se alcanzó una cima en la historia de la matemática. De ella se tenía un concepto elevado que compartían todas las clases sociales, desde los esclavos, como el de Menón —a quien Sócrates enseñaba el problema de la duplicación del cuadrado— hasta los reyes, como Ptolomeo I, que preguntaba a Euclides por una manera de aprender geometría que fuese más fácil que sus *Elementos*, motivando (según nos cuenta Proclo, siglo v) la clásica respuesta: «en geometría, no hay camino real».

CAPÍTULO 3

LA EDAD MEDIA: EL AÑO 1000. GERBERTO DE AURILLAC

1. La decadencia

El filósofo Max Scheler (1874-1928) en *El saber y la Cultura* (Espasa Calpe, Argentina, 1938), clasifica los saberes en *saber práctico, saber culto* y *saber de salvación.* Si aplicamos esta clasificación al caso de la matemática, podemos decir que el saber de los egipcios fue un modelo de saber práctico: les interesaba la solución de problemas concretos, generados por la organización social (impuestos, transacciones comerciales, construcciones arquitectónicas) o por la necesidad de volver a marcar los límites de los campos de cultivo borrados por las crecidas periódicas del Nilo. Era un saber de dominio útil para modificar el mundo, ordenarlo y habitarlo. Después vino la época griega, ejemplo típico del saber culto en todos los aspectos, pero, de manera especial, en el aspecto matemático. Se estudiaba esta ciencia para *entender* la naturaleza y poner a prueba hasta dónde podía llegar el hombre en su actividad razonadora, que tenía por finalidad comprender el universo y captar su armonía.

Los últimos representantes de esta matemática, el saber culto por excelencia, fueron: Apolonio de Perga (siglo II a. C.), autor de libros sobre las cónicas, no superados a lo largo de los años; Eratóstenes de Cirene (siglo II a. C.), que supo medir ingeniosamente el radio de la Tierra a partir de la distancia entre Alejandría y Siena —ciudades situadas en un mismo meridiano— y de sus latitudes, y Claudio Ptolomeo, ya en el siglo II, autor del *Almagesto,* obra en que sistematiza todos los conocimientos astronómicos de la época, que desarrolló el sistema geocéntrico que perduró cator-

ce siglos (hasta Copérnico). Después de otros autores menos importantes, habitualmente recopiladores de obras anteriores, como Pappus (siglo III), Diofante (siglo III), Proclo (siglo V) y algunos otros, entramos en la Edad Media, durante la cual gran parte del mundo occidental pasó a preocuparse por el saber de salvación, cuyo interés esencial era participar en el ser y fundamento supremo de las cosas.

Desde los romanos, los conocimientos que eran objeto de enseñanza formal eran los contenidos en el *trivium* (gramática, historia y dialéctica), o artes de la palabra, y el *quadrivium* (aritmética, geometría, astronomía y música), o artes del pensamiento, ya instituidos por Platón en su *República.* Bréhier, en su *Historia de la Filosofía,* afirma que a lo largo de la Edad Media (siglos IV-XV) «esos conocimientos no tenían una finalidad en sí mismos, puesto que el *trivium* se justificaba en su aplicación a la lectura e interpretación de las Escrituras y de los Santos Padres, así como en la enseñanza del dogma. El *quadrivium* era indispensable para la liturgia y el cómputo eclesiástico. Para un uso tan limitado no se sentía la necesidad de aumentar los conocimientos adquiridos, ni de promover las ciencias por sí mismas, sino que bastaba con hacer inventario de la herencia del pasado en enciclopedias más o menos extensas».

Por ello no hubo producción matemática original. Se desarrollaron en grado elevado las ciencias de las cosas divinas, pero todas las otras ciencias, y en particular la matemática, se redujeron a la reproducción de las obras clásicas de los griegos, una reproducción que fue a menudo tergiversada y escasamente comprendida. Fueron enciclopedias famosas las *Etimologías* de San Isidoro (570-636), obispo de Sevilla, y *Sobre la Naturaleza de las Cosas*, del inglés Beda el Venerable (672-735), que pretendían contener todo el saber de la época. De hecho, fueron textos muy difundidos en su tiempo y también a lo largo de los siglos, pero no contenían ninguna novedad matemática de importancia.

Precisamente, por este respeto y culto exagerado a los antecesores distinguidos, la educación matemática se redujo a una repetición continua de las obras clásicas. Por la falta de vitalidad creativa, la matemática entró en decadencia, hasta el punto de regresar al nivel de siglos anteriores. Es un ejemplo típico de ello la geometría. Ya fuese por su título, que propicia la confusión de *elemental*

con *simple*, o por el peso de la autoridad de Platón, el hecho es que durante siglos, incluso hasta bien entrada la Edad Media, se escogió la obra *Elementos* de Euclides como texto para aprender geometría dentro de los estudios generales del *quadrivium*. Lo que era una gran obra para matemáticos formados y un modelo insuperable a tener en cuenta por los matemáticos creadores, se tomó como una obra para enseñar geometría a aquellos que, para medir y moverse en el mundo exterior, sólo les interesaba la geometría práctica. A lo largo de toda la Edad Media, los estudiantes tropezaban con el *pons asinorum* (teorema según el cual si un triángulo tiene dos lados iguales, los ángulos opuestos también son iguales), y seguían la demostración de Euclides, que aprendían de memoria porque no conseguían entender (posiblemente ni los alumnos ni los profesores) el porqué de la demostración, relativamente complicada, de un hecho que se ponía de manifiesto con mirar la figura o, a lo sumo, observando que basta con sobreponer el triángulo sobre sí mismo en forma invertida. Euclides, matemático genial, quiso dar una demostración de ello sin salir del plano y con la única aplicación de los cinco postulados fundamentales con los que quería edificar toda la geometría. Era un *tour de force* que para Euclides tenía un sentido profundo, como cuando quiso evitar el uso del quinto postulado (el de las paralelas) tanto como fuera posible, con el riesgo de complicar las demostraciones. (Por este motivo se le ha llamado el primer profeta no euclidiano.) Euclides era muy consciente de que edificaba su geometría para matemáticos entendidos y buenos conocedores de la materia, y no para principiantes, cuyo objetivo es iniciarse en geometría.

La diferencia entre la matemática para investigadores o matemáticos formados y la matemática para usuarios —a quienes sólo interesa entender los resultados— y la proporción de ambas tendencias en la enseñanza elemental, ha provocado polémicas y discrepancias tanto entre los matemáticos como entre los psicólogos y educadores. La eficacia de los *Elementos* de Euclides en el aprendizaje de la geometría comenzó a cuestionarse en el siglo XVIII, cuando Clauriaut (1713-1765), en un texto de geometría para la escuela secundaria, escribía: «No es posible que un principiante pueda comprender los *Elementos* de Euclides, porque el autor comienza con teorías abstractas. Para profundizar en cualquier ciencia es nece-

sario hacer sentir todo el esfuerzo, todo el trabajo que la humanidad hizo a lo largo de siglos para extraer la teoría de lo concreto, de la realidad.» Atento a esta reacción, Legendre (1752-1833) publicó, en 1794, un texto de geometría de carácter intuitivo, que se utilizó profusamente a lo largo de todo el siglo XIX. No obstante, el convencimiento no era total. Poco después, puesto que la Academia de las Ciencias de París tenía que dar autorización para publicar una nueva edición de los libros de Euclides, los académicos Delambre (1749-1822) y Prony (1755-1839) afirmaban: «Sin declararnos admiradores exclusivos de una manera pasada de moda, diríamos que esta manera tiene importantes ventajas, como también graves inconvenientes; forma un lenguaje poco conocido hoy en día que merecería serlo más [...], porque este estudio será como mínimo un ejercicio útil para acostumbrarse al rigor de las argumentaciones que se está demasiado dispuesto a despreciar [...]. Nadie nos escucharía si propusiéramos que se comenzara el estudio de la matemática por Euclides, pero se está en lo cierto cuando se afirma que cualquier geómetra hará muy bien en leer a Euclides una vez en su vida [...].»

2. El sistema de numeración hindú-arábigo

El hecho más importante de los siglos lindantes con el año 1000 fue la introducción en Europa del sistema de numeración decimal con las cifras hindú-arábigas, procedentes de la India y difundidas y perfeccionadas por los árabes de Bagdad y de todos los dominios del norte de África y de la península ibérica. Es el sistema de numeración que usamos hoy en día, de base 10 y carácter posicional, y presentó la novedad, en su época, de introducir el número cero.

Los griegos, grandes pensadores y creadores de la matemática pura, no tenían un sistema de numeración ágil y práctico. Calculaban poco y con dificultad, y utilizaban las mismas letras del alfabeto para representar los números. Arquímedes tuvo que hacer lo que hoy denominaríamos una obra de investigación original, *El Arenario,* para poder designar números muy grandes, tomando potencias sucesivas del número diez mil (miríada), pero no pudo dar reglas de cálculo prácticas para números intermedios. Se trata más bien de una

demostración de la existencia de números superiores a cualquier límite, pero sin utilidad para su cálculo efectivo. Los romanos poseían el sistema de numeración que lleva su nombre, y que todavía hoy se utiliza para indicar las fechas o los capítulos de una obra, pero que no era nada práctico para las operaciones comunes. Para estas operaciones utilizaban ábacos diversos, que fueron perfeccionando con el tiempo, y también las manos: indicaban los números y sus operaciones mediante diferentes posiciones de los dedos y la combinación de los dedos de las dos manos. De todas formas, el cálculo con cifras romanas no era nada fácil, necesitaba de expertos especializados, y, al no ser de uso común, la matemática se estancó.

La introducción y la generalización del uso del sistema hindú-arábigo fue una obra que necesitó siglos. Los algebristas árabes (entre los que destacó Al-Khuwarizmi —siglo IX—, de cuyo nombre parece que deriva la palabra *algoritmo,* y de cuyo libro, escrito en árabe, *Hisrab al jabar wa-al-mugabala,* se cree que deriva la palabra *álgebra*) lo fueron utilizando poco a poco y, a partir de ellos y del gran centro cultural de Córdoba (con Abderramán III, siglo X), se fue extendiendo por el sur de Europa.

Quien más contribuyó a esta difusión fue el italiano Leonardo Pisano, llamado *Fibonacci* (1170-1240), que después de viajar algunos años por el norte de África, al volver a Italia, en 1202, y «para que a la raza latina no le faltara por más tiempo aquel conocimiento» publicó su *Liber Abaci,* donde se utilizan y se enseñan a utilizar sistemáticamente el sistema de numeración decimal y las cifras hindú-arábigas.

Para comprender el ambiente cultural de la época, en la que ya se vislumbraba el futuro, es interesante mencionar, como parte de la polémica provocada entre los partidarios de continuar con el uso de los ábacos tradicionales y los propulsores del nuevo sistema, una discusión pública que el emperador Federico II de Sicilia convocó en el año 1225. En esta discusión, presenciada por toda su corte, el filósofo oficial Giovanni Palermita (Juan de Palermo) propuso a Fibonacci unos problemas matemáticos. Parece ser que Fibonacci salió airoso de la prueba y, de esta manera, contribuyó a la difusión del nuevo sistema de numeración y cálculo. El hecho muestra también que, después de más de diez siglos, la matemática volvía a inte-

resar, aunque no a los dioses como en la antigua Grecia, sí, al menos, a los reyes.

Como ejemplos de los problemas que fueron propuestos a Fibonacci se suelen mencionar: *a*) Hallar un número (racional) cuyo cuadrado, aumentado o disminuido por 5, continúe siendo un cuadrado; *b*) solución de una ecuación cúbica, que Fibonacci resolvió con una gran aproximación; *c*) un problema bastante engorroso de análisis indeterminado. El nuevo sistema de numeración y cálculo fue adoptado por la comuna de Pisa, pero su adopción generalizada no se produjo hasta la invención de la imprenta de Gutenberg (1387-1468), que comenzó a extenderse a mediados del siglo XV.

En realidad, el interés de la mayoría de la gente y de los cortesanos de Federico II no estaba tanto en la matemática en sí, tal y como ahora la entendemos y como tal vez la entendieron los griegos, sino que estaba más bien motivado por su desviación hacia la magia, por el interés de adivinar el futuro y por la creencia en las propiedades esotéricas de los números. Muchos nombres eran traducidos a números según ciertas reglas convencionales y se pretendía deducir de las propiedades de estos números el comportamiento de las personas representadas por ellos. De esta manera, Federico II justificaba su oposición al papa Inocencio IV por el hecho de que su equivalente numérico era el 666, precisamente el número de la Bestia en el Apocalipsis.

3. El año 1000. Gerberto de Aurillac

La representación numérica de un conjunto de mil elementos depende del sistema de numeración utilizado. No significa nada que se pueda atribuir al conjunto. En el sistema decimal se representa por 1.000, pero en sistemas de otras bases tiene representaciones menos especiales; por ejemplo, en base 6 se representa por 4.344, y en base 2 por 1.111.101.000. Esto nos dice que atribuir significados especiales al año 1000 de nuestra era, o al próximo año 2000, es sólo una tradición derivada de nuestro sistema especial de numeración de base 10. Lo mismo se puede decir de la costumbre tradicional de conmemorar los centenarios, sesquicentenarios o quintos centenarios de un acontecimiento. Sin embargo, puesto que es

conveniente hacer un balance periódico de lo sucedido en ciertos intervalos de tiempo para poder vislumbrar el futuro, dicha costumbre es interesante e instructiva. Puesto que nos hallamos ya cerca del año 2000, conviene analizar un poco más lo que sucedía en el campo de la matemática alrededor del año 1000, con el objeto de poder trazar comparaciones, mirando al pasado, y predicciones, mirando al futuro.

En plena Edad Media, el panorama cultural, en el sentido en que hoy entendemos la cultura, era desolador. Lo único bueno era el interés, que casi constituía una manía colectiva, por conservar las obras antiguas, traducirlas al latín o al árabe, y guardarlas celosamente en las bibliotecas de las instituciones religiosas y políticas. Los medievales, respetuosos con las obras de los clásicos, las tradujeron y conservaron a menudo con fidelidad, acciones que fueron muy acertadas y motivo de agradecimiento de las futuras generaciones, puesto que la mayoría de las veces que se quiso introducir modificaciones o ampliaciones originales, la falta de comprensión empeoraba el producto.

Citemos algunos ejemplos característicos de la vertiente matemática de la vida cultural de la época. En un artículo titulado «Une correspondence d'écolatres du XI siècle» (vol. 5 de sus *Memoires Scientifiques*), Paul Tannery reproduce una correspondencia mantenida hacia el año 1000 entre dos profesores alemanes, Reginboldo de Colonia y Rodolfo de Lieja, en la que, a partir de la proposición de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos —propiedad que parece que conocían por referencia de algún manuscrito de la época—, entran en disquisiciones sin sentido sobre lo que se debe entender por ángulo *interior* o *exterior* de un triángulo, pasando después a expresar su opinión sobre el valor de la diagonal del cuadrado de lado unidad. Uno opinaba que valía 7/5, y el otro 17/12, fundamentando estos valores en citas de autores anteriores, pero sin intentar una sola demostración ni mencionar el teorema de Pitágoras, o la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, todo lo cual parecían ignorar, a pesar de que ya era conocido por los griegos quince siglos atrás.

Otro ejemplo lo constituye una publicación de alrededor del año 1050, de un tal Franco de Liège, titulada *De quadratura circuli*, en la que intenta resolver el problema de la cuadratura del círculo recor-

tando un círculo en pedazos de distinta forma e intentando, como si de un rompecabezas se tratara, volverlos a juntar de manera que terminasen por formar un cuadrado. La matemática se había transformado en una simple actividad experimental con resultados aproximados, tal vez suficientes para las aplicaciones prácticas, pero lejos del fin primordial de *entender* y de la exactitud y certeza a que conduce el razonamiento lógico.

Una figura representativa de la época fue el monje Gerberto de Aurillac (940-1003), que fue papa con el nombre de Silvestre II, posiblemente el único papa matemático que ha existido. Su vida y su obra se pueden hallar en el volumen *Assaig d'història de les idees físiques i matemàtiques a la Catalunya medieval*, de J. Millàs Vallicrosa (Institució Patxot, Barcelona, 1931). Por su capacidad e influencia dentro de la Iglesia, Gerberto fue uno de los principales propulsores del sistema hindú-arábigo de numeración. Sus trabajos matemáticos consistían en técnicas para efectuar cálculos numéricos, como la construcción de ábacos, y un astrolabio muy perfeccionado para cálculos astronómicos y también para medidas topográficas y geodésicas. El saber matemático había retrocedido casi dos mil años, a la época en que sólo se conocían los números racionales, y se pretendía expresarlo todo a partir de fracciones, suficientemente aproximadas para los usos prácticos. No se ofrecían resultados exactos, ya fuese por ignorancia o por considerarlos de una exactitud inútil para las tareas ordinarias. Así, Gerberto, con toda su habilidad en el cálculo y toda su extensa cultura general, otorga a la altura de un triángulo equilátero las seis séptimas partes de su lado, sin pretender, naturalmente, ofrecer ninguna demostración de ello.

Algunos problemas matemáticos, como el cálculo de las fechas de las fiestas móviles de la Iglesia, estaban vinculados a la religión; otros trataban de curiosidades situadas ya en la frontera de la magia y la mística. El propio Gerberto tenía que explicar a su discípulo Adelboldo, que fue más tarde obispo de Utrecht, por qué el área de un triángulo equilátero no coincidía con el número triangular del mismo lado. (Si el lado mide n unidades, el número triangular correspondiente es $n(n + 1)/2$.) A finales del siglo X se fundó el Monasterio de Ripoll, consagrado como basílica en el año 977. Fue un centro cultural importante, con una biblioteca excelente (obra

principalmente de Arnolfo, obispo de Girona en el período 954-970) con la que Gerberto tuvo mucha relación. Bajo la dirección del Abad Oliva, entre el 1002 y el 1046, Ripoll tuvo un gran esplendor. Oliva intervino en una discusión secular sobre si Jesucristo había nacido un sábado o un domingo, con la ayuda de unas tablas para cálculos numéricos confeccionadas por él mismo, y de ciertos datos astronómicos y otros sobre tradiciones referidas por la Biblia. Oliva se inclinaba por el sábado, de acuerdo con el resultado que también había obtenido Beda el Venerable. Éstos eran los problemas que preocupaban al mundo culto de la época.

CAPÍTULO 4

EL RENACIMIENTO. TARTAGLIA Y LOS DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. La imprenta. La galaxia Gutenberg

Al llegar el Renacimiento, en los siglos XV y XVI, la matemática acompañó al nuevo florecimiento de todas las ciencias y humanidades, a partir del cual se fue transformando el saber de salvación de la Edad Media en un nuevo saber culto. Este florecimiento resucitó el espíritu de la Grecia clásica y, aunque le fueron añadidos los cambios y ajustes naturales heredados de los siglos pasados, que le dieron nueva forma, se mantuvo su espíritu.

El vehículo principal para la difusión del conocimiento y para fundamentar y afianzar los cambios que se iban produciendo fue la imprenta, inventada por Gutenberg en 1450. Hasta entonces, los libros tenían escasa divulgación (ya que eran copias manuscritas, a menudo modificadas o alteradas) y eran, por su coste elevado, casi exclusivos de bibliotecas de monasterios o dependencias gubernamentales, de acceso difícil y restringido a los eruditos. Con la imprenta, poco a poco, el número de obras impresas —tanto clásicas como recientes— fue creciendo. De este modo, el conocimiento se fue extendiendo y generalizando.

Uno de los primeros libros de matemáticas impresos fue la *Summa de Arithmetica, Geometria et proporcionalitate* del monje franciscano Luca Paccioli (1445-1514), que fue publicado en Venecia en 1495. Libro de escasa originalidad, notablemente inspirado en el *Liber Abaci* de Fibonacci, era una especie de enciclopedia que tuvo una gran difusión por sus aplicaciones en diversas ramas, como la arquitectura, la navegación, la óptica, la astronomía y la estática. Del mismo Luca Paccioli era el libro *Divina proportione*

(1509), que fue famoso por su énfasis en la división áurea, y por sus aplicaciones al arte o a ciertas medidas del cuerpo humano y de los poliedros regulares.

Gracias a la imprenta, los libros, y el saber que contenían, podían ser difundidos con mucha más facilidad que en los siglos anteriores. Por ello se ha dicho que se inició en el mundo la nueva era de la galaxia Gutenberg, en la que el hombre culto fue cimentando sus conocimientos en los libros y los hizo depender de éstos cada vez más, formando un todo con ellos. Se podría decir que el hombre completo era el conjunto de él mismo y de su biblioteca. A través de los siglos, el material impreso (que se ha presentado en una gran variedad de formas: libros, revistas, diarios y enciclopedias) ha llegado a inundar la sociedad y ha sobrepasado la capacidad de información de cada individuo. Además, el material impreso, aun limitado a la especialidad y a los intereses de cada uno, sobrepasa las posibilidades de las bibliotecas particulares, y hasta las de las grandes bibliotecas públicas. Por este motivo se dice que con el segundo milenio se está llegando al límite de la galaxia Gutenberg, para empezar a entrar en la galaxia Marconi, en la que toda la información procederá de los grandes bancos de datos, a los que se accederá a través de ordenadores. Toda la información disponible, en lugar de ser acumulada en libros impresos, se almacena en disquetes o microfichas con la ayuda de ordenadores, que también permiten hallar el dato buscado y transcribirlo con facilidad mediante impresoras a una medida legible. El hombre del año 2000 será la pareja indisoluble de él mismo y un terminal de ordenador.

No parece que esto sea un grave inconveniente para la ciencia, si consideramos su lenguaje preciso y concreto, de fácil adaptación al lenguaje electrónico. Qué pasará con la literatura ya no se puede predecir. Es posible que nazcan estilos y gustos literarios nuevos. Del mismo modo que con el establecimiento de la palabra escrita se perdió la entonación de los trovadores y de los juglares (que recitaban), es posible que a la composición electrónica le falte fuerza y armonía en comparación con el lenguaje escrito. Desaparecerá mucha retórica, pero tal vez se gane en síntesis e ideas. Con el lenguaje informático de los ordenadores se perderán aspectos de la poesía actual, pero seguramente nacerá otro arte poético y literario, más esquemático, pero igualmente placentero para los entendidos

y versados. Son los cambios inevitables del hombre en su continua evolución y desarrollo.

2. Tartaglia y los desafíos matemáticos

Mientras tanto, entre los árabes se había ido desarrollando el álgebra (de procedencia hindú), que empezó con problemas de tipo adivinanza (como cuentos para provocar intriga y desarrollar la fantasía, tan exuberante en aquellas razas orientales), y que poco a poco fue tomando un carácter abstracto y forzó el desarrollo del cálculo literal y de las transformaciones algebraicas. Un ejemplo de problema-adivinanza, de los que hoy en día llamamos «de matemática recreativa», era el siguiente: «La quinta parte de un enjambre se posa en una flor de durazno y la tercera parte en una flor de jazmín, mientras que el triple de la diferencia entre esos números vuela sobre la flor de un almendro, y queda una pobre abeja, indecisa, sin saber dónde ponerse. Dime, hermosa niña, ¿cuál es el número total de abejas?»

Las ecuaciones de primer y segundo grado se conocían desde la Antigüedad, posiblemente, desde los tiempos de los egipcios. Por otro lado, al aparecer con frecuencia problemas que conducían a una ecuación de tercer grado, se estableció una conciencia general de la dificultad que ofrecía la solución de las ecuaciones cúbicas. Luca Paccioli, en su *Summa* (1485), afirma: «no se conoce ninguna regla para resolver las ecuaciones cúbicas, excepto en algunos casos particulares [...], igual que sucede con la cuadratura del círculo».

Los intentos de resolver la ecuación cúbica fueron muy importantes para el desarrollo del álgebra. La solución, según parece, se debe a Scipione del Ferro (1465-1526), que la guardó en secreto, y fue redescubierta en 1539 por Nicolo Fontana (1500-1557), más conocido como *Tartaglia,* quien la comunicó a Girolamo Cardano (1501-1576); Cardano, mencionando su origen, la publicó por primera vez en su *Ars Magna*, en el año 1545. Más que el hecho en sí mismo, son importantes para la ciencia las circunstancias que envolvieron el descubrimiento, que muestran el grado de interés por la ciencia de la sociedad del Renacimiento. En efecto, los matemáticos se desafiaban entre sí, proponiéndose unos a otros pro-

blemas interesantes, con cuya solución pretendían alcanzar prestigio y fama más que una compensación crematística. A menudo, las competiciones eran públicas, como lo fue una espectacular discusión entre Ferrari y Tartaglia, presenciada por numerosos expertos y curiosos, que aconteció el 10 de agosto de 1548 en Milán, en la iglesia de Santa Maria del Giardino (derribada a principios del siglo XIX), que estaba situada en el área de la actual vía Romagnosi.

Muchos de los desafíos a los que Tartaglia fue sometido se mencionan en su obra fundamental *Quaesiti et inventioni diversae,* publicada en Brescia en el año 1546. La mayoría de los problemas que se proponían en estas competiciones estaban vinculados a la ecuación de tercer grado. Son interesantes, por ejemplo, las cuestiones propuestas a Tartaglia por el maestro Zuanne de Tonini en 1530 (cuando la solución de la ecuación cúbica no se conocía), a saber: *a*) hallar un número que multiplicado por su raíz cuadrada, más 3, sea igual a 5; *b*) hallar tres números tales que el segundo sea igual al primero más dos, el tercero igual al segundo más dos, y que el producto de los tres sea igual a mil. Tartaglia, bien conocido por su temperamento irritable, le contestó: «Maestro Zuanne, vos me habéis enviado cuestiones imposibles de resolver de manera general, porque si procedemos con el álgebra, la primera conduce a la ecuación de cubo más tres veces el cuadrado igual a 5, y la segunda conduce a que el cubo más seis veces el cuadrado, más ocho veces la incógnita, sea igual a 1.000, y ambas preguntas han sido consideradas imposibles de resolver de manera general hasta el día de hoy, pero al preguntarlas intentáis fingir que tenéis la solución y, con ello, alcanzar honra. Afirmo que deberíais enrojecer al proponer a otros cuestiones que vos mismo no sabéis cómo resolver; y como prueba de mi seguridad al respecto, apuesto 10 ducados contra 5 a que no tenéis la regla general para resolverlas.»

Lo anterior es un ejemplo de la pasión puesta por Tartaglia y sus oponentes en las cuestiones propuestas, pasión común a todos los creadores, ya que como decía Rey Pastor en 1932: «un sabio sin vocación apasionada, incapaz de sentir el latido heroico que acompaña a toda creación, es un alma en pena, como un sacerdote sin fe», añadía: «los renacentistas italianos no crearon la ciencia actual a sueldo o a destajo en las grandes fábricas de la cultura oficial, sino que lucharon para conquistar sus favores y perpetuarse pro-

líficamente, como competidores de un mismo amor insaciable y tormentoso». Por otro lado, en la respuesta de Tartaglia a Zuanne queda claro que lo único que buscaban los que intervenían en los desafíos era alcanzar la honra, si bien en ocasiones se ofrecían premios en dinero para obtener la comprensión de los hombres vulgares.

Los desafíos matemáticos tuvieron una larga tradición. Otro famoso ejemplo fue el de la *braquistrocona* (curva de caída de un cuerpo en un tiempo mínimo entre dos puntos no situados en una misma vertical), propuesto en 1696 por Johann Bernoulli «a todos los matemáticos del mundo», con la promesa de «honor, alabanza y aplauso» para quien lograra resolverlo —lo que más tarde hizo el propio Bernoulli—.

3. Las actuales olimpíadas matemáticas

Las olimpíadas deportivas comenzaron en la antigua Grecia, en la ciudad de Olimpia (de ahí el nombre) en los siglos V o VI antes de nuestra era. Se prolongaron durante algunos siglos, hasta el siglo IV de la era actual, en que fueron suprimidas. De todas formas, el espíritu de la competición, el ánimo de poner a prueba las posibilidades de uno y compararlas con las de los demás, subsistió de una manera u otra a través de los tiempos. La característica común era que en ellas se luchaba para alcanzar fama y renombre, y no por dinero. Ésta es la diferencia fundamental respecto a los juegos de azar o estrategia, cuyo móvil principal es la obtención de beneficios materiales. En la Edad Media eran comunes las justas entre caballeros errantes que defendían la justicia y que buscaban fama y prestigio, en lugar de beneficios materiales, que, de hecho, ofrecían a sus reyes o a sus damas.

A imagen de las competiciones deportivas, aparecieron también competiciones intelectuales entre poetas y declamadores, que competían por una corona de laurel o una flor natural, símbolos de fama y honor, que después los trovadores popularizaban entre la gente, olvidando con frecuencia al autor, quien «perdía fama, pero ganaba eternidad». Los Juegos Florales de Cataluña y Provenza datan del siglo XIV (1323, en Tolosa).

Hemos visto cómo en la época de Tartaglia, Ferrari y Carda-

no, en pleno centro del Renacimiento, surgieron los desafíos matemáticos. Adivinanzas y problemas curiosos que procedían de la India, transmitidos y adornados por los árabes en forma de cuentos y leyendas, fueron tomando un carácter público, con discusiones, a veces, solemnes, en las cortes de los poderosos, en las plazas o en los atrios de las iglesias. La gran mayoría del público no podía entender ni los enunciados ni las soluciones, como a buen seguro que el pueblo griego tampoco entendía el significado genuino de la duplicación del cubo o de la cuadratura del círculo, pero por admiración y fe en los entendidos asistía a las citas y aclamaba a los ganadores —éstos, por su parte, conseguían ocupar cargos en las universidades que se creaban, o se convertían en preceptores de los hijos de los ricos, o en sus consejeros—. He aquí el precedente de las olimpíadas matemáticas actuales, a las que esta ciencia debe tanto de su progreso.

En los tiempos modernos, las olimpíadas matemáticas han resucitado, en forma de competición entre jóvenes alumnos de la escuela secundaria, con el objeto de estimular su estudio y dedicación a la matemática. Tuvieron su origen en Hungría, a finales del siglo XIX, y poco a poco se extendieron a otras naciones. En ellas participaban estudiantes de las mismas edades y de países diferentes, inscritos en algún centro de enseñanza media, y de edad no superior a los veinte años. En las últimas olimpíadas matemáticas de Pekín (1989), Alemania (1990) y Suecia (1991), estuvieron representados más de cincuenta países. Cada país puede enviar hasta seis representantes y se reparten varias medallas de oro, plata y bronce. Los ejercicios consisten en la solución de problemas de nivel de escuela secundaria, más de ingenio que de cálculo. También se han comenzado a celebrar olimpíadas de informática, en consideración a la importancia de esta rama del pensamiento matemático actual.

Desde el punto de vista formativo, se ha discutido, y continúa a debate, la utilidad, para el desarrollo integral del pensamiento matemático, que puedan tener estas olimpíadas basadas en la resolución de problemas. Para algunos, la polarización en las técnicas de resolución de problemas puede ir en detrimento de un desarrollo holístico, de una versión amplia y panorámica de todos los contenidos. Otros piensan que la práctica en la solución de problemas (si éstos

son convenientemente escogidos) es fundamental para el desarrollo y el aprendizaje integral de toda la matemática. El hecho es que aquellos países que, como Hungría, han sido pioneros y se han mantenido constantes en la organización y realización de olimpíadas, también se han distinguido por el número y la calidad de sus matemáticos, muchos de ellos exportados a diversos países del mundo.

En realidad, por la complejidad del mundo actual cada disciplina escolar tiene que ir mucho más allá de sus programas oficiales mínimos y, puesto que esto no es posible en todas las disciplinas, la tendencia es que cada alumno, según su vocación y preferencia, escoja la disciplina en que desea profundizar, más allá de los contenidos estándar oficiales. Para la matemática se han ingeniado diversas posibilidades, como actividades fuera del aula (ferias de ciencias, clubs de ciencias o estancias científicas) y, en particular, las olimpíadas matemáticas para diferentes niveles escolares y de carácter regional, nacional e internacional. A veces, los misoneístas y los conservadores pueden afirman que las competiciones pueden provocar una cierta sobrevaloración en los ganadores y un complejo de inferioridad excesivo en los que pierden. A pesar de ello, los educadores deben saber enseñar que la vida es un continuo de éxitos y fracasos, y se debe educar para ello: alentando en los fracasos momentáneos y relativizando los triunfos, siempre accidentales. Por esto, las olimpíadas pueden ser de un gran valor educativo. El problema radica, y por ello hay que prestar una gran atención, en saber escoger los problemas adecuados para conseguir los objetivos marcados, y no insistir en temas obsoletos, sin futuro ni necesidad viable hoy en día.

CAPÍTULO 5

LA EDAD MODERNA. COPÉRNICO Y KEPLER. LA CIENCIA NUEVA DE GALILEO. NEWTON Y LEIBNIZ

1. La Edad Moderna

Al entrar en la Edad Moderna (siglo XVI), debido principalmente al Renacimiento italiano, a la Ciencia Nueva de Galileo y al descubrimiento de América, en Occidente se fue dejando de lado el saber de salvación y se volvió al saber práctico, al saber del rendimiento, orientado hacia la posible modificación práctica del mundo a partir de las ciencias positivas, especializadas según el principio de la división del trabajo. «El saber culto y el saber de salvación van pasando cada vez más a un segundo plano. Pero de este saber de dominio y de trabajo sólo se cultiva una mitad a lo largo del período mencionado, aquella parte que sirve para la dominación y gobierno de la naturaleza externa, sobre todo de la inorgánica. En cambio, la técnica interna de la vida y del alma (es decir, la que se ocupa del problema de extender hasta el máximo el poderío y el dominio de la voluntad —y por ella del espíritu— sobre los procesos del organismo psico-físico en cuanto éste, como unidad rítmica del tiempo, obedece a leyes vitales) quedó decididamente relegada a un segundo plano, por el afán de gobernar la naturaleza externa y muerta» (Max Scheler, *El saber y la Cultura*).

Hubo que esperar hasta el siglo XX, momento en que las humanidades fueron invadidas por las matemáticas, provocando —en beneficio mutuo— que las ciencias del hombre hicieran uso de la matemática y que la matemática se interesase en adaptar su metodología a las necesidades de aquéllas.

2. El sistema nuevo del mundo

Desde que Claudio Ptolomeo (siglo II) recopiló en su obra *Sintaxis Matemática* (conocida como *Almagesto*) todos los conocimientos astronómicos anteriores, con la sistematización necesaria de la trigonometría y la construcción de las tablas de cuerdas para diferentes arcos, indispensables para los cálculos astronómicos, el sistema del mundo aceptado unánimemente era el geocéntrico, con la Tierra en el centro, alrededor de la cual giraban el Sol, la Luna y los planetas.

El soporte filosófico del sistema, aparte de la intuición, era la convicción de que las trayectorias tenían que ser circunferencias, ya que el movimiento circular es el único «simple y completo, puesto que si el sistema rectilíneo tiene una dirección simple, hacia abajo, por ejemplo, no es completo, ya que excluye el movimiento en la dirección inversa, y si es completo, no es simple, ya que el móvil debe seguir consecutivamente diferentes direcciones. Sin embargo, en el movimiento circular el punto inicial también es el punto final, es decir, que cada punto del recorrido se puede considerar como un principio, un medio o un final, a voluntad. Es el único movimiento que da todo lo que puede ser en cada momento: es un movimiento perfecto y eterno». Estas consideraciones de Aristóteles sobre el movimiento circular eran tan claras y evidentes que no era posible imaginar que las trayectorias de los astros (trayectorias aparentes) fuesen otra cosa que circunferencias o composiciones de las mismas. No había ninguna razón por la cual el espacio no tuviera que ser homogéneo y, por tanto, las trayectorias no tenían que cambiar de forma de un momento a otro. De manera que no era posible que los astrónomos, de quienes Claudio Ptolomeo fue un exponente, pensaran en ningún momento que las trayectorias no eran circunferencias, o curvas formadas por composición de movimientos circulares. Por ello tuvieron que inventar un mecanismo complejo de epiciclos, deferentes, ecuantes y excéntricas (todos ellos circunferencias enlazadas entre sí) que, al progresar la exactitud de las observaciones, había que ir complicando para ajustarlo a la experiencia. En la época de Copérnico (1473-1543) se necesitaban un total de 77 círculos para explicar los movimientos aparentes del Sol y de los planetas.

Por otro lado, Copérnico sabía que algunos antiguos griegos, como Aristarco (siglo III a. C.), ya habían imaginado que todo giraba alrededor del Sol. Por este motivo escribió *De Revolutionibus Orbium Caelestium* (1543), proponiendo que todos los planetas, incluida la Tierra, tenían este movimiento de rotación alrededor del Sol. Se seguía considerando que las órbitas eran circulares y que las velocidades eran constantes, lo que provocaba discrepancias entre la situación prevista y la observada. Con el trabajo de Tycho Brahe (1546-1601) se acumularon observaciones cada vez más precisas, con las cuales J. Kepler (1571-1630), en el año 1609 (*Sobre el movimiento del planeta Marte*), pudo enunciar sus tres leyes famosas, que más tarde completó en *Harmonici Mundi* (1618).[1] Con estas leyes se hundían las razones aristotélicas de simplicidad y perfección que conducen al movimiento circular y a la velocidad constante, y Kepler debió acudir a la geometría para hallar otras razones para justificarlas. Puesto que en su época sólo se conocían seis planetas (Saturno, Júpiter, Marte, Tierra, Venus y Mercurio) y, por tanto, había cinco distancias entre cada uno de ellos y el siguiente, le resultó tentadora la idea de buscar la explicación de este hecho a partir de los cinco poliedros regulares ya conocidos por Platón.

Suponiendo que la esfera que contiene a Saturno estaba circunscrita a un cubo, en el cual a su vez estaba inscrita la esfera de Júpiter, y así sucesivamente con el tetraedro, el dodecaedro, el icosaedro y el octaedro y las esferas de los siguientes planetas, Kepler consiguió obtener muchas coincidencias entre las distancias y las características reales de las órbitas, por un lado, y ciertas dimensiones de estos poliedros, por otro. De esta manera, se sustituyó la *simplicidad* por la *armonía,* que suponía que debía presidir la estructura del universo, y, así, siguiendo a los pitagóricos, conectó las velocidades angulares de los planetas con series armónicas de acordes musicales, justificando la excentricidad de las órbitas como algo necesario para mantener la armonía de los sonidos producidos por

1. Las tres leyes de Kepler son: 1. Los planetas giran alrededor del Sol dibujando elipses de las que el Sol es uno de sus focos. 2. Para cada planeta, las áreas descritas por los radios que los unen con el Sol, son iguales para tiempos iguales. 3. Los cuadrados de los tiempos de revolución de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol.

los movimientos. Era la música de los planetas, imperceptible al oído, pero accesible a la razón. Actualmente, todo esto nos puede parecer una mezcla de misticismo y magia, pero si sustituimos esferas, poliedros y música por ecuaciones diferenciales, autovalores y grupos de invariancia, ¿qué diferencia hay respecto de la física cuántica o la física relativista de nuestro siglo?

La obra de Kepler no sólo constituyó una nueva concepción del sistema solar, sino que también sirvió para romper con la tradición basada en el principio de razón suficiente (*nada existe sin una razón de ser*). Si no hay ninguna razón para que una trayectoria se desvíe, ésta tiene que mantener siempre la misma forma (recta o circunferencia en el plano, o hélice en el espacio). Si no hay ninguna razón para que una velocidad resulte alterada, ésta tiene que ser uniforme. Según esta manera de razonar parecía indiscutible que la trayectoria de los cuerpos celestes tenían que ser circunferencias, y que las velocidades debían ser constantes. Con las leyes de Kepler se vio que esto no era así y, unos años más tarde, Cyrano de Bergerac (1619-1655), en su obra *Historia cómica de los estados e imperios del Sol*, ridiculizaba el principio de razón suficiente explicando cómo en sus aventuras había encontrado a unos personajes que con un hilo muy fino levantaban cargas muy pesadas, sin que el hilo se rompiera, porque todas sus partes estaban hechas igual, y, por tanto, no había razón alguna para que se rompiera por un sitio en lugar de otro.

3. La Ciencia Nueva de Galileo

La necesidad de la *via geometrica* para comprender la naturaleza fue expuesta por Galileo en *Il Saggiatore* (1623), en un fragmento que ya hemos citado antes: «El libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático, cuyos caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales sería imposible entender una sola palabra, y se andaría siempre como en un laberinto oscuro.» Con esto, después de veinte siglos, Galileo actualizaba la advertencia de Platón al frente de su Academia: «No entre aquí quien no sepa geometría.»

La idea de que la comprensión del mundo requiere conoci-

mientos matemáticos es tan antigua como la propia matemática, ya que fue precisamente esta comprensión la que constituyó el objetivo de la matemática en su origen. Por otro lado, la idea de los pitagóricos de explicar los fenómenos naturales a partir de relaciones numéricas, o por la armonía en la disposición de las partes, estuvo siempre latente desde el siglo VI antes de nuestra era. El problema radica en saber qué conocimientos matemáticos son necesarios para cada hecho natural. Para los griegos bastaba con la recta y la circunferencia (la regla y el compás). Kepler necesitó las cónicas y los poliedros regulares. Galileo nos habla de triángulos, círculos y otras figuras geométricas, ¿hasta dónde se habría podido llegar sólo con estos elementos?

Catorce años después de *Il Saggiatore*, aparece la *Geometría* de Descartes (1637), como apéndice de su famoso *Discourse de la Méthode*. El *Discourse,* y la obra *Ad locos planos et solidos isagoge*, de Fermat, publicada en 1679, amplían la geometría tradicional con la geometría de coordenadas, o geometría analítica. De esta manera, se obtuvo una nueva variedad de objetos geométricos para construir modelos de los fenómenos naturales. Al identificar figuras geométricas con ecuaciones, éstas devienen símbolos nuevos para interpretar el libro de la naturaleza al que hacía referencia Galileo. Comenzaba una nueva era en la que la intuición visual de la geometría propiamente dicha se ampliaba con la intuición, más abstracta, del álgebra y sus ecuaciones. La línea recta conservaba su preeminencia en cuanto a simplicidad, puesto que la ecuación de primer grado es la más simple de todas. La circunferencia, en cambio, quedaba en una posición de igualdad con el resto de las cónicas, representadas todas ellas por ecuaciones de segundo grado. Con esto fue más fácil comprender las elipses planetarias que tanto desorientaron a Kepler y a sus contemporáneos. La naturaleza respondía a una intuición un poco más elaborada, para la cual no bastaba la geometría de los griegos, sino que era necesaria la sistematización suministrada por la geometría en coordenadas. La idea de simplicidad se mantenía en cierta manera, puesto que las cónicas son las curvas más simples después de la recta.

4. Newton y Leibniz

En aquel tiempo se obtuvieron todos los elementos necesarios para que, uniendo la geometría con los procesos de paso al límite, Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716) creasen el cálculo infinitesimal, con el cual Newton pudo formular su famosa ley de la gravitación, que reunía, en un solo enunciado, las tres leyes de Kepler y que explicaba otros muchos fenómenos de la mecánica celeste diferentes de los que las tres leyes explicaban. Los poliedros regulares y las armonías musicales de Kepler cayeron de súbito frente a una nueva intuición, la de una fórmula matemática que describía una cierta fuerza como directamente proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias.

Conviene hacer algunas observaciones importantes sobre este hecho de explicar la gravitación universal mediante una fórmula matemática.

1. Desde los griegos, el problema básico de la física era explicar el porqué de los fenómenos observados. Kepler quiere explicar el porqué del hecho de que los planetas sean seis, y no más ni menos. Después se descubrieron nuevos planetas, pero la pregunta clásica, a la griega, se mantendría siempre: ¿por qué aquel número? Galileo lucha contra este tipo de preguntas midiendo la ley de la caída de los graves y el tiempo de la oscilación del péndulo, sin detenerse ante la barrera del porqué, creando así las bases de una *Ciencia Nueva.* Sin embargo, no resultó nada fácil imponer esta nueva manera de pensar, en la que se cambiaba el *porqué* por el *cómo.* Descartes se siente todavía defraudado: «todo lo que dice Galileo sobre la caída de los graves carece de fundamento: antes que nada debería haber establecido la naturaleza del peso».

Por ello, Newton, conocedor de que la primera objeción a su teoría sería preguntar por la naturaleza de la atracción misteriosa entre los cuerpos y el porqué de su intensidad, se anticipa a las posibles críticas con su frase *hypothesis non fingo.* El éxito obtenido afianzó definitivamente la Ciencia Nueva de Galileo y la idea newtoniana de que el objeto de la física es la búsqueda de las fuerzas a partir del movimiento, y la búsqueda, a partir de estas fuerzas, de fenómenos nuevos. En realidad, esto supone adaptar el método geo-

métrico de Euclides a la filosofía natural, sentando axiomas que se aceptan o se rechazan, pero que no se discuten, ni tampoco se busca su origen o su naturaleza para deducir más tarde de ellos resultados que concuerden con la experiencia.

2. El éxito de Newton y de la matemática de su tiempo en la explicación de la naturaleza entusiasmó a muchos pensadores, Leibniz a la cabeza de ellos, que intentaron extender el *método matemático* a la metafísica y a la moral, transformando el *discutamos* de estas disciplinas en el *calculemos* de la matemática. Siempre han existido espíritus cuya fe en el poder de la matemática ha sobrepasado toda ponderación. También hoy se dice de los cerebros electrónicos que son capaces de resolver todos los problemas de la humanidad. La extrapolación de las posibilidades de la matemática a cuestiones no medibles conduce a la mística o a la poesía, pero se aparta de la ciencia, a pesar de haber tenido partidarios, a veces ilustres, desde el pitagórico Filolao (siglo v a. C.) hasta el moderno H. Wronski (1778-1853).

3. El éxito del cálculo en la mecánica racional afirmó la idea intuitiva del determinismo, según la cual, dadas las condiciones de cualquier sistema en un instante concreto (situación de las partículas y de las fuerzas que sobre ellas actúan), debe ser posible, teóricamente, calcular el estado del sistema en cualquier momento de su evolución futura. Laplace (1749-1827), máximo representante del determinismo, escribió en las primeras páginas de su libro *Essai Philosophique sur les Probabilités*: «Debemos considerar el presente estado del universo como el efecto de sus estados anteriores y como la causa de aquello que lo seguirá. Una inteligencia que en un momento determinado conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y la situación respectiva de los seres que la componen, y que, además, fuese lo bastante grande como para someter todos estos datos al análisis, abarcaría en la misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del Universo y de sus átomos más pequeños, y nada le sería desconocido, y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos.»

Es curioso que, precisamente, Laplace, el gran determinista, fuese uno de los creadores del cálculo de probabilidades, a través del cual, un siglo después, el indeterminismo se sometería al cálculo y pasaría a ser una de las características de la física contemporánea.

4. El éxito del cálculo infinitesimal en física mostró que los fenómenos naturales necesitan, para ser explicados, algo más que la intuición elemental, producto de la observación directa a través de los sentidos. El cálculo infinitesimal no es nada intuitivo, ya que nuestros sentidos captan la naturaleza por integración continua de sus elementos. Vemos el movimiento, pero aparecen paradojas al querer explicarlo en sus partes elementales; lo mismo sucede cuando tratamos de analizar la materia y pensamos si es infinitamente divisible o si, por el contrario, no lo es. Éste fue el motivo de las discusiones clásicas entre los griegos, desde Zenón de Elea y Demócrito (siglo V a. C.), y la razón de que se hicieran críticas al cálculo infinitesimal, entre ellas las siempre mencionadas de Berkeley (1685-1753), que satirizaba los fantasmas de las cantidades evanescentes, que no son cero, pero que después se anulan, y que no son ni finitas ni infinitamente pequeñas.

El cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz es un ejemplo, *grosso modo*, de cómo los conocimientos se adquieren primero por una especie de instinto o intuición que hace captar los detalles sin analizar los fundamentos. El análisis de los fundamentos sólo proporciona resultados positivos después de un tiempo de sedimentación. A lo largo del siglo XVIII, ni Euler (1707-1783), ni Lagrange (1736-1813), consiguieron clarificar el cálculo infinitesimal, que consideraban como una mezcla de conceptos oscuros y equivocados que se compensaban y que acababan dando resultados correctos. El matemático Michel Rolle (1652-1719) decía que el cálculo era un conjunto de falacias ingeniosas, y Voltaire opinaba que el cálculo infinitesimal era el arte de contar y medir exactamente cosas cuya existencia no era concebible. D'Alembert (1717-1783), colaborador de Diderot (1713-1784) en la famosa *Enciclopedia*, ante las dudas de sus alumnos sobre el concepto de diferencial, aconsejaba: «continúen adelante que la fe ya llegará». A partir de Cauchy (1789-1857) se dieron definiciones relativamente rigurosas de los conceptos de derivada y de integral definida. En realidad, la noción de diferencial siempre ha resultado oscura para los estudiantes atentos, mucho más que la noción de integral. Sólo modernamente, al ser algebrizada por Chevalley (*Theory of Lie Groups*, Princeton, 1946), aparece clara matemáticamente. Pero la definición que

de ella resulta no responde a lo que la física necesita: expresar con precisión aquellos fantasmas evanescentes de Berkeley, partes infinitésimas de alguna cosa, que son incomprensibles para la intuición (basada en el *esse est percipi*, «ser es ser percibido»), pero que dan un resultado excelente cuando son tratados mediante las reglas adecuadas. Es el primer paso hacia el terreno en el cual, en mi opinión, para entender hay que dejar de lado la intuición y confiar exclusivamente en el razonamiento lógico; y la razón de esto es, precisamente, que nuestros sentidos no abarcan lo que es infinitamente pequeño. Para Berkeley, «el espacio que se da a los sentidos no es divisible hasta el infinito, porque hay un mínimo táctil y un mínimo visible por debajo del cual nada es percibido ni, por tanto, nada existe». Existente o no, este más allá del tacto y de la vista es lo que Newton y Leibniz hicieron posible someter al cálculo y sobre lo cual se fueron edificando después todas las ciencias exactas de los tres últimos siglos.

A partir de Newton y Leibniz, los matemáticos dispusieron de una herramienta eficaz para explicar muchos fenómenos naturales, a pesar de no disponer de una fundamentación precisa. Se puso de manifiesto, una vez más, la doble cara de la matemática como estructura del mundo de las ideas y como herramienta de cálculo para cuantificar, medir y predecir resultados del mundo real. De esta manera, por un lado se enriqueció la matemática pura de Platón, que con las nuevas ideas pudo resolver y esclarecer problemas clásicos relacionados con el paso al límite y con los dominios de lo infinitamente grande y de lo infinitamente pequeño. Por otro lado, se inició la época gloriosa de las matemáticas aplicadas a las ciencias de la naturaleza. Euler obtuvo profundos resultados en teoría de números (matemática pura), además de llegar muy lejos en el cálculo de integrales, desarrollos en serie (aun dejando de lado las cuestiones de convergencia) y el uso de números complejos. Lagrange (1736-1813) con su *Mecánica Analítica*, Fourier (1768-1830) con su teoría analítica del calor y Laplace (1749-1827) con sus monumentales *Mecánica Celeste* (1825) y *Teoría analítica de las Probabilidades* (1812), fueron los representantes de la matemática francesa que condujo al cálculo infinitesimal a resultados básicos y definitivos, a pesar de carecer de fundamentos absolutamente rigurosos.

A pesar de sus bases endebles y discutibles, el instinto de los matemáticos les orientó con acierto, y el edificio fue levantado hasta muy alto, lo que permitió después, a lo largo de todo el siglo XIX, contemplar la cima del terreno ya conquistado y volver a las bases para analizar con detalle los fundamentos y proporcionar a la matemática la estructura sólida que ha permitido los grandes éxitos, teóricos y aplicados, de la época contemporánea.

Al llegar a este punto, no podemos entrar en los detalles de la matemática del siglo XIX, que se ramificó y extendió en direcciones diversas, cada una con sus problemas y resultados propios. La especialización se hizo cada vez más notable e indispensable. Nuestro objetivo es irnos desplazando hacia la rama que actualmente se denomina *Geometría Integral* (Blaschke, Helgason, Gelfand), *Geometría Estocástica* (Stoyan, Kendall, Mecke, Ambartzumian) y, a veces, *Geometría Estadística* (Grenander). Por tanto, debemos limitarnos a recordar las raíces iniciales de esta teoría, aunque sin olvidar sus conexiones con las otras ramas laterales que le han servido de apoyo y estímulo, prestándole métodos y proponiéndole problemas. Comenzaremos por el origen de las probabilidades y, en particular, de las llamadas probabilidades geométricas.

CAPÍTULO 6

ORIGEN Y EVOLUCIÓN DE LA TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

1. Prehistoria del cálculo de probabilidades

El concepto de probabilidad, en su forma más intuitiva y más o menos vaga, data de los tiempos más remotos. Debe ser al menos tan antiguo como los primeros juegos de azar (concebidos por el hombre para distraerse o para probar su suerte), puesto que todo juego lleva implícita la probabilidad mayor o menor de ganar y, en consecuencia, la posibilidad de equilibrar la proporción entre la cantidad jugada y la posible ganancia.

En realidad, la vida en libertad es una continua toma de decisiones, en las que en cada una de ellas hay que evaluar la posibilidad de conseguir los objetivos deseados. El hombre primitivo, en sus luchas con el resto de los hombres, o en sus cacerías para obtener el sustento, debía evaluar, a su manera, la mayor o menor probabilidad de vencer, o el grado de efectividad de las posibles estrategias a seguir. Debía establecer una gradación entre lo que era imposible y lo que era seguro, la cual se puede considerar como la semilla del concepto de probabilidad.

El juego de dados, que es el ejemplo típico con el que se presentaron los primeros casos de *medida* cuantitativa de la probabilidad, es mencionado ya en el *Rig Veda,* uno de los primeros poemas de la literatura hindú, que data posiblemente de unos mil años antes de nuestra era. Por otro lado, Sófocles atribuye a Palamedes la invención del juego de los dados, quien lo habría enseñado a sus compatriotas a lo largo del sitio de Troya (siglos X u XI a. C.).

Los primeros problemas que se presentaron en los juegos de azar eran resueltos intuitiva o experimentalmente por los propios juga-

dores, pero, a medida que se quisieron complicar las reglas de los juegos para tener más variedades de éstos y hacerlos más atractivos, y a medida que se exigió, al mismo tiempo, una mayor exactitud en las condiciones o leyes que tenían que regirlos, apareció la necesidad de acudir a los entendidos en matemáticas. El primer ejemplo de este hecho se halla en el siguiente problema, resuelto por Galileo (*Considerazione sopra il giuoco dei dadi*, *Le Opere di Galileo Galilei*, vol. XIV, Florencia, 1855).

El problema de Galileo

En la época de Galileo (1564-1642) estaba en boga el juego de dados llamado *pasadiez*, que consistía en lanzar tres dados a la vez y sumar los puntos resultantes. El jugador ganaba si la suma resultaba superior a diez y perdía en caso contrario (es decir, si la suma era igual o menor que diez).

Es fácil ver que el juego es equitativo, es decir, que la probabilidad de ganar es igual a la de perder. En efecto, puesto que los puntos situados en las caras opuestas de un dado siempre suman 7, en cualquier posición que queden los dados, la suma de los puntos de las caras superiores más la suma de los puntos de las caras inferiores vale siempre 21. Por tanto, si la suma de los puntos de las caras superiores es mayor que 10, la suma de los puntos de las caras inferiores ha de ser igual o menor que 10, y recíprocamente. Por consiguiente, a cada caso favorable le corresponde un caso no favorable, lo que significa que hay igual número de unos y de otros y que, por tanto, la probabilidad de ambos es la misma.

El hecho que extrañaba, y que un aficionado a este juego no sabía explicarse —si bien debía ser un observador fino—, era que en la suma de los puntos de los tres dados, el número 11 salía con más frecuencia que el 12, y el 10 con más frecuencia que el 9, a pesar de que todos estos números podían obtenerse como resultado de seis combinaciones diferentes. Así, el 9 se puede obtener de las seis combinaciones (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3); el 10 de (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4), y análogamente con el 11 y el 12. Según opinaba el jugador, si los cuatro números 9, 10, 11 y 12 se podían formar con el mismo número de combinaciones (seis), entonces cada uno debería salir con la

misma frecuencia. Comoquiera que esto último no era confirmado por la práctica, recurrió a Galileo, el científico más famoso de su época, para pedirle su opinión sobre la aparente paradoja.

La explicación de Galileo fue sencilla. Basta con advertir que no es cierto que todas las combinaciones tengan las mismas posibilidades de aparecer. La combinación (3, 3, 3), por ejemplo, únicamente se puede presentar de una sola manera, mientras que la combinación (1, 2, 6) se puede presentar de seis maneras, permutando los números 1, 2, 6 entre los tres dados. A cada combinación, por tanto, le corresponde un cierto número de casos: los casos posibles que efectivamente hay que considerar para calcular la probabilidad. Con esta observación, Galileo construye el cuadro de casos favorables y posibles, y calcula con facilidad que la probabilidad de que la suma valga 10 u 11 vale 0,125, y que la probabilidad de que la suma valga 9 o 12 vale 0,1157, número que es, en efecto, menor que el anterior. Lo destacable del caso es que, aun siendo la diferencia entre las dos probabilidades sólo de una centésima, fuese, no obstante, apreciada experimentalmente por el jugador, lo que prueba tanto la exactitud del teorema de Bernoulli (según el cual la probabilidad coincide con la frecuencia), como la precisión que se alcanza en estas cuestiones a partir de una práctica continuada y una condición de observador agudo.

2. Los creadores: Fermat y Pascal

El anterior problema de Galileo es muy simple: para resolverlo basta contar bien los casos favorables y los posibles. Pero cuando los problemas se fueron complicando, se tuvo que aplicar recursos más potentes y hubo que utilizar todos los mecanismos al alcance del cálculo matemático. Se considera que los primeros que utilizaron métodos matemáticos indirectos fueron los grandes matemáticos Fermat y Pascal, en una correspondencia que ambos mantuvieron en el año 1654 (*Oeuvres de Fermat*, vol. II, p. 296, carta de Pascal a Fermat del 29 de julio de 1654). En esta carta, Pascal explica a Fermat el problema que le había propuesto un tal Caballero de Meré, jugador hábil, pero no matemático, según el propio Pascal. «No tengo tiempo —dice la carta— de enviarle la demostración de una difi-

cultad que asombraba en gran medida al señor de Meré, que es un espíritu fino, pero no geómetra (lo cual, como usted sabe, es un gran defecto) y que no sólo no comprende que una línea matemática sea divisible hasta el infinito, sino que cree entender que está compuesta por puntos en número finito, y nunca le he podido sacar de ahí. Si usted lograra hacerlo, le haría perfecto. Él me decía, pues, que había hallado falsedad en los números por la siguiente razón:

»Si uno acepta sacar el 6 con un dado, la ventaja de aceptar por cuatro jugadas es como 671 a 625.

»Si uno acepta hacer *sonnés* (sacar dos seises de una sola vez) con dos dados, hay desventaja en aceptar por 24 jugadas. No obstante, 24 es a 36 (que es el número de posibilidades con los dos dados) como 4 es a 6 (que es el número de posibilidades con un solo dado).

»He aquí lo que constituía su gran escándalo, y lo que le hacía decir en voz alta que las proporciones no eran constantes y que la aritmética se contradecía, pero usted verá con facilidad la razón por los principios en que usted está trabajando.»

Aunque Pascal no entra en detalles, a partir de un razonamiento elemental se demuestra que, en efecto, el cociente de sacar como mínimo un 6 en cuatro jugadas y no sacar ninguno vale 671/625, es decir, hay ventaja aceptando la primera opción. En cambio, el cociente de sacar como mínimo una vez el doble 6 en 24 jugadas (con dos dados) y la posibilidad de no sacarlo vale 0,96... y, por tanto, hay desventaja aceptando la segunda opción. El razonamiento es también simple, pero necesita una reflexión más sutil que la simple proporcionalidad errónea que hacía el Caballero de Meré. Lo notable, como en el caso del amigo de Galileo, es que esta desventaja pudiera ser estimada experimentalmente, dado su valor en apariencia despreciable, puesto que según los anteriores resultados las probabilidades de sacar o no un doble seis en 24 jugadas están entre sí como 96 a 100, valor muy cercano a la unidad.

3. La evolución del cálculo de probabilidades

La teoría de las probabilidades, después de la correspondencia entre Pascal y Fermat y de haber alcanzado el derecho a formar parte de las disciplinas científicas, fue interesando, poco a poco, a

muchos y brillantes matemáticos. El primer libro sobre la materia es de Huygens, físico holandés, y apareció en 1654 con el título *De Rationibus in ludo aleae*. En este libro se tratan diversos problemas relativos a los juegos de azar y se introduce el concepto de esperanza matemática, que luego devino muy fecundo.

En 1671, el *Grand Pensionnaire* Jan de Witt presentó a los Estados Generales de las Provincias Unidas de los Países Bajos un proyecto de rentas basado en métodos estadísticos. Más tarde, en 1693, el astrónomo inglés Halley publicó en Inglaterra unas tablas de mortalidad que fueron aplicadas durante muchos años. Poco tiempo después, en 1713, apareció la obra monumental y básica de Jacobo Bernoulli, titulada *Ars Conjectandi*, publicada por su sobrino Nicolás Bernoulli, siete años después de la muerte de Jacobo Bernoulli. En esta obra se encuentra el famoso teorema de Bernoulli, que identifica la probabilidad con la frecuencia, y que es de fundamental importancia en toda la teoría de las probabilidades.

A lo largo del intervalo comprendido entre la muerte de Jacobo Bernoulli y la publicación de su obra, aparece un libro del francés Montmort titulado *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasard* (1708), en cuya segunda edición (1714) el autor añade diversas cartas con interesantes discusiones y comentarios de Nicolás Bernoulli. En esta obra de Montmort aparece por vez primera el llamado problema de las coincidencias, que después se fue repitiendo, más o menos modificado, en casi todos los textos de probabilidades. Su enunciado es el siguiente: se introducen en una urna trece bolitas numeradas del 1 al 13 y después de mezclarlas se sacan de una en una, sucesivamente. El jugador gana si al menos una de las bolas extraídas tiene el mismo número que el que indica el orden de extracción. Se estima la probabilidad de que esto suceda. Montmort demuestra que la probabilidad vale

$$P = 1 - 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! + \ldots + 1/13! = 0{,}6321,$$

donde $2! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, etc.

Este resultado, cuya demostración es clásica y que citamos por su interés histórico, significa que de cada 100 veces que se realice el juego habrá por término medio unos 63 casos en los que habrá

coincidencia. Dicho de otro modo, tomando el problema como un juego de azar, si el premio ofrecido al jugador fuese de 100 unidades de una cierta moneda, la apuesta tendría que ser de 63,21 unidades de la misma moneda para que el juego fuera equitativo.

Lo notable es que unos años después Euler considera el caso de un número infinito de bolitas y obtiene una serie que es la misma expresión anterior prolongada indefinidamente (*Calcul de la Probabilité dans le Jeu de Recuontre*, Hist. Acad. de Berlín, 1751). La suma de esta serie también es 0,6321... y coincide hasta la novena cifra decimal con el resultado de Montmort para 13 bolitas.

Otra versión del problema es la siguiente: tenemos un conjunto de cartas y sus correspondientes sobres, se mezclan las unas con los otros, se coloca al azar cada carta dentro de un sobre distinto, y se estima la probabilidad de que como mínimo quede una carta dentro de su sobre correspondiente. El resultado se expresa por la misma fórmula de Montmort limitada al término indicado por el número de cartas. Para un número de cartas superior o igual a 6 se obtienen los primeros decimales 0,632. Es decir, si el número de bolitas o de cartas pasa de 6, la probabilidad difiere en menos de una milésima, con independencia del número de elementos.

Posteriormente, cabe calificar como importante el libro clásico del inglés De Moivre (1667-1754), titulado *The Doctrine of Chances* (1718), que hace uso de los recursos matemáticos más avanzados de su época para tratar problemas de probabilidades finitas, muy interesantes y nada fáciles. Unos años más tarde, hay que destacar la memoria de J. Bayes titulada «An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances» (*Philosophical Transactions*, 1764) en la que se introdujo la llamada *probabilidad de las causas*, que dio lugar a la distinción entre las hoy denominadas *estadísticas bayesianas* y las *estadísticas no bayesianas*.

En todos estos estudios y progresos, los problemas de probabilidades se fueron complicando, pero, de hecho, se trataba siempre de probabilidades finitas, es decir, de problemas en los que el número total de casos posibles es finito y, por tanto, también lo es el de los casos favorables.

Llegamos de esta manera a 1777, año en que aparece un libro singular titulado *Essai d'Arithmetique Morale*, escrito por Buffon,

que contiene el origen de las probabilidades geométricas, y del cual nos interesa hablar con detalle.

4. Buffon y el problema de la aguja

Georges Louis Leclerc (1707-1788), nombrado Conde de Buffon por Luis XV, fue un gran naturalista francés, posiblemente, junto a Linneo, el más grande de su siglo. Escribió una extensa Historia Natural de treinta y seis volúmenes. En su juventud, no obstante, tuvo una cierta inclinación por la matemática y, aunque no se distinguió en ella de forma especial, ingresó en la Academia de las Ciencias de París en 1734 como cultivador de la mecánica racional.

Su interés por la matemática nunca le abandonó y, así, en 1777, en el volumen IV del *Suplemento a la Historia Natural,* publicó un opúsculo titulado *Essai d'Arithmetique Morale,* en el que se halla el origen de las probabilidades geométricas. Este *Essai* ha sido reproducido en el libro *Un autre Buffon,* de J. L. Binet y J. Roger (Hermann, París, 1977, col. Savoir).

Como buen materialista, Buffon se interesó por el hombre en su totalidad, hasta en sus reacciones afectivas, sus preocupaciones o temores (miedo a la muerte) y sus pasiones, entre ellas la pasión por los juegos de azar. Intentó tratar estas cuestiones con la matemática, distinguiendo entre el número intrínseco y su influencia en el comportamiento de las personas. Esta tentativa dio origen al adjetivo de «moral» añadido al título del fascículo mencionado.

Buffon intenta adaptar la matemática al estudio de lo real, sobre todo en lo que al hombre respecta, tomando en consideración y procurando medir, dentro de lo posible, sus emociones, temores y esperanzas. En realidad, hasta ahora, todos los sentimientos han eludido las medidas precisas y las definiciones exactas. De manera que Buffon, al intentar tratar a los sentimientos matemáticamente, podría ser considerado como un precursor de los conjuntos borrosos, usados a menudo, pero definidos de forma imprecisa.

Para empezar, dice Buffon, habría que escoger una unidad de medida que podría ser el *temor a la muerte,* que es, según su parecer, una característica humana a la que «podrían referirse las medidas de los otros temores y también las de las esperanzas, puesto que

la diferencia entre las esperanzas y los temores es tan sólo cuestión de signo positivo o negativo».

Según Buffon, el hombre, como cualquier animal, nace, crece, envejece y muere. La diferencia estriba en que el animal no sabe que morirá (en términos de Buffon), mientras que el hombre lo sabe y hace de la muerte el centro de su vida, de sus creencias, de sus ritos, de sus esperanzas y de sus temores. Son ideas curiosas que no han sido desarrolladas, pero que dejan abiertas amplias perspectivas para futuras aplicaciones de la matemática —actual o futura— al análisis de los sentimientos del hombre, lo que Buffon intenta a través de las probabilidades y de la subjetividad de los números («el matemático aprecia el dinero por su cantidad, pero el hombre moral debe apreciarlo más bien por las ventajas que le puede procurar [...]; un hombre que tiene cien mil escudos de renta no es diez veces más feliz que el que tiene diez mil [...]; cuando el dinero rebasa un cierto límite, casi deja de tener valor real [...]; los matemáticos que han hecho cálculos sobre los juegos de azar han considerado el dinero por su cantidad numérica, en cambio, moralmente, una probabilidad menor que uno sobre diez mil se debe considerar como nula»). Buffon considera esta probabilidad de uno sobre diez mil porque ésta era, en su época, la probabilidad de que una persona de 56 años viviera un día más, y era, por tanto, la que medía, a su manera, su temor a la muerte.

Al considerar las pasiones del hombre, Buffon señala la pasión del juego como la más extendida y perniciosa y la que «por su propia naturaleza es un contrato vicioso desde el principio, un contrato perjudicial para cada contratante particular y contrario al bien de la sociedad». Y añade Buffon: «Yo entiendo por juego todos los convenios, todas las apuestas en las que uno coloca al azar una parte de sus bienes para obtener una parte de los bienes de otro, y afirmo que el juego es un pacto o contrato desventajoso para ambas partes y que el efecto es provocar siempre una pérdida superior a las ganancias, eludiendo el bien para caer en el mal.»

Después de diversas consideraciones sobre la aritmética, y su sentido moral de otorgar a los números un peso dependiente de su significado para cada problema y cada individuo, y después también de consideraciones diversas sobre la *esperanza moral* en la teoría de las probabilidades, ya introducida por J. Bernoulli en 1713,

Buffon observa que «el análisis ha sido el único instrumento que hasta la fecha de hoy se ha utilizado en la ciencia de las probabilidades, como si la geometría no fuese adecuada para estos fines, cuando en realidad basta con prestar un poco de atención para observar que la ventaja del análisis sobre la geometría es tan sólo accidental, y que el azar es tan propio de la geometría como del análisis». Después añade: «para poner a la geometría en posesión de sus derechos sobre la ciencia del azar, bastará con inventar juegos que se basen en la extensión y en sus relaciones». A continuación menciona, a modo de ejemplo, el llamado juego de *franc carreau* (sobre un plano cuadriculado se lanza al azar una moneda circular y se pregunta la probabilidad de que la moneda quede completamente en el interior de uno de los cuadrados, sin cortar ninguna línea de separación) y, para demostrar que se pueden inventar muchos juegos similares, describe el juego, que desde entonces ha sido reproducido en muchos tratados de probabilidad con el nombre de *problema de la aguja de Buffon.* Consideremos un plano, que puede ser el suelo o una mesa grande, dividido por rectas paralelas a una distancia D (figura 6.1).

Se lanza al azar una aguja de longitud a menor o igual que D. La probabilidad p de que la aguja corte a alguna de las paralelas es

$$p = 2a/\pi D \qquad [1]$$

Buffon demuestra esta fórmula de manera directa. Si se considera el experimento como un juego de azar, la probabilidad p es lo que debe valer la apuesta del jugador para recibir, si gana, el premio de una unidad, bajo el supuesto de que el juego es equitativo.

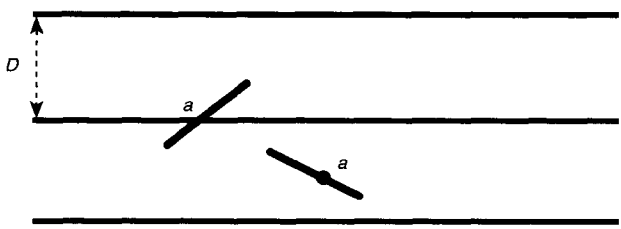


FIGURA 6.1

Por ejemplo, si $a = D$, para que el juego sea equitativo, la apuesta tiene que valer $p = 2/\pi = 0{,}636$ unidades de moneda, con el convenio de recibir de premio una unidad de moneda en caso de ganar, es decir, en caso de que la aguja corte, en efecto, alguna de las rectas paralelas.

Se considera que con este problema nace la teoría de las probabilidades geométricas. Como vemos, se trata de un juego de azar para cuya solución no es posible *contar* los casos posibles y los favorables (como sucede con los juegos discretos, como los dados o las cartas), sino que hay que *medir* estos casos. La diferencia entre *medir* y *contar* es la que distingue a la geometría del análisis o de la aritmética.

5. Generalizaciones: Laplace

Una de las armas más poderosas de las que dispone la matemática para su progreso es la de generalizar a partir de resultados concretos y particulares. En el caso del problema de la aguja de Buffon, se puede generalizar a partir de las diversas direcciones posibles que se presentan. En primer lugar, se puede pensar en suprimir el supuesto restrictivo de que a sea menor o igual que D. Si a es mayor que D, el problema puede resolverse sin dificultad, pero el resultado es complicado y, al carecer de simplicidad, carece también de la belleza que preside la matemática creadora cuando no persigue una finalidad práctica determinada. En cambio, el resultado vuelve a ser simple si, en lugar de considerar si la aguja corta, o no, alguna de las paralelas, se pide el valor medio (o esperanza matemática) del número de puntos de intersección de la aguja con las paralelas. El problema todavía se puede presentar de una manera más general.

Consideremos una línea poligonal como la indicada en la figura 6.2, cuyos lados tienen longitudes variables $a_i < D$. La variable aleatoria N (número de puntos en los que la poligonal corta las paralelas) es igual a la suma de las variables aleatorias de cada lado de la poligonal (que valen 1 si la poligonal corta alguna de las paralelas, y 0 en caso contrario). Para cada una de estas variables aleatorias, la esperanza de cortar alguna paralela viene dada por [1], para la longitud correspondiente a_i. Por tanto, puesto que la espe-

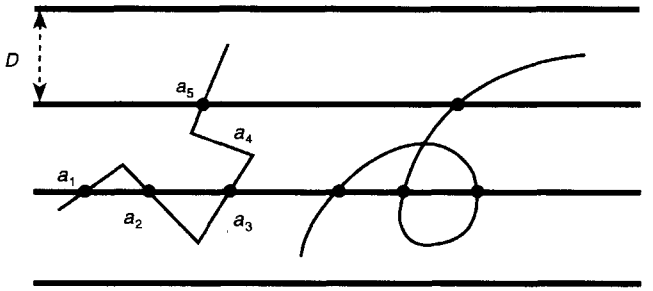


FIGURA 6.2

ranza matemática de la suma es igual a la suma de las esperanzas, y la suma de las longitudes a_i es igual a la longitud L de la poligonal, resulta que

$$E(N) = 2L/\pi D \qquad [2]$$

Puesto que toda curva rectificable de longitud L se puede considerar como el límite de las poligonales inscritas, resulta que [2] vale para cualquier curva rectificable, como la que aparece en la figura 6.2.

Este resultado también se puede interpretar como un juego de azar. Supongamos que el plano está dividido por rectas paralelas a distancia D. Entonces se lanza sobre el mismo, al azar, una curva de forma arbitraria y longitud L, por ejemplo un hilo flexible. El jugador recibe un premio igual al número de puntos N en los que la curva corta a las paralelas (por ejemplo, en la figura 6.2, $N = 4$). Para que el juego sea equitativo, la apuesta debe valer $E(N) = 2L/\pi D$ unidades de moneda. Para este tipo de problemas se puede consultar: L. A. Santaló, *La Probabilidad y sus Aplicaciones* (Iberoamericana, Buenos Aires, 1955).

Otra generalización que Buffon considera es la siguiente: supongamos que el plano está dividido por una cuadrícula de lado D y que lanzamos sobre él, al azar, una aguja de longitud $a = D/2$. Bajo estos supuestos, Buffon llega a la conclusión de que hay ventaja en apostar a que la aguja cortará alguno de los lados de la cuadrícula (en efecto, esta probabilidad vale 0,557, que es superior a 1/2). Más tarde, Laplace, en su obra monumental *Théorie Analy-*

tique des Probabilités (1812) considera el problema general que consiste en suponer que el plano está dividido en rectángulos de lados D_1, D_2 en los que lanzamos al azar una aguja de longitud a, menor que los lados. Laplace calcula que la probabilidad de que la aguja corte alguno de los lados de la trama de rectángulos vale

$$p = \frac{2a(D_1 + D_2) - a^2}{\pi D_1 D_2} \qquad [3]$$

Si en lugar de una aguja se lanza sobre el plano de rectángulos una curva de forma arbitraria y de longitud L, el valor medio (o esperanza matemática) del número N de puntos en los que la curva corta a los lados de los rectángulos (figura 6.3) es igual a

$$E(N) = \frac{2L(D_1 + D_2)}{\pi D_1 D_2} \qquad [4]$$

Por ejemplo, si se toma una cuadrícula de lados $D_1 = D_2 = 10$ cm y se lanza sobre ella una curva de forma arbitraria y longitud $L = 20$ cm, el valor medio del número de puntos de intersección es $E(N) = 8/\pi = 2{,}54$. Es decir, que en un juego equitativo en el que se reciben de premio tantas unidades de moneda como puntos de

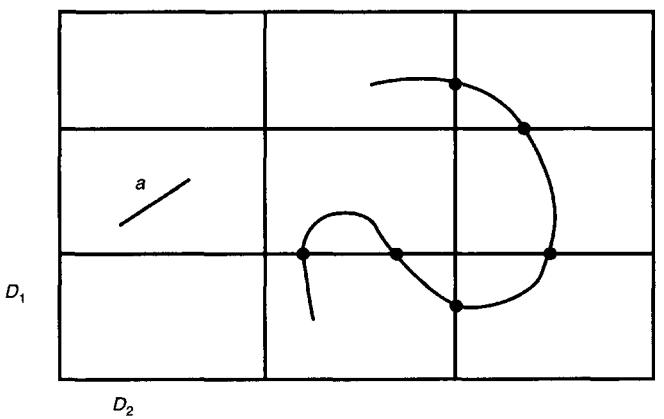


FIGURA 6.3

intersección resulten entre la trama de cuadrados y la curva lanzada, la apuesta debe valer $E(N) = 2{,}54$ unidades de moneda. Si se cobra más, el juego es favorable a la banca, y si se cobra menos, lo es para el jugador. Se puede suponer que el plano está dividido en triángulos, hexágonos u otros polígonos congruentes cualesquiera, en lugar de rectángulos, y se pueden considerar problemas análogos. (Véase L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison Wesley, Reading, 1976, capítulo 8.)

Buffon menciona incluso la posibilidad de considerar problemas de otra índole: «Estos ejemplos bastan para dar una idea de los juegos que uno puede imaginar sobre las razones entre áreas. Se podrían proponer muchas otras cuestiones del mismo tipo, que no dejarían de ser curiosas e, incluso, útiles. Por ejemplo, se podría plantear el riesgo de cruzar un río sobre una tabla más o menos estrecha, o el miedo que uno debe tener de ser alcanzado por un rayo o por una bomba, y muchos otros problemas vinculados con el azar que pertenecen tanto a la geometría como al análisis.»

Naturalmente, estos problemas que implican medir *miedos* o *esperanzas* no parecen tratables con la matemática actual. Incluso otros, mucho más concretos y, al parecer, mucho más simples, no han sido resueltos, por ejemplo, el cálculo de la probabilidad de aparición de cada cara al lanzar un dado con forma de prisma, de sección cuadrada pero de altura distinta del lado de la base, es decir, distinto de un cubo. A este respecto, se pueden consultar los trabajos de Budden y Singmaster en *The Mathematical Gazette,* vols. 64 (1980) y 65 (1981).

6. El método de Monte Carlo

Además de resolver problemas geométricos referentes a los juegos de azar con las fórmulas anteriores, los matemáticos advirtieron muy pronto que estas fórmulas comportaban curiosas consecuencias. Consideremos, por ejemplo, la primera fórmula de Buffon [1]. La probabilidad p se puede calcular experimentalmente, llevando a cabo la experiencia un número suficientemente grande de veces y dividiendo el número de casos favorables por el número de pruebas realizadas. Una vez conocida la probabilidad p de

manera experimental, la fórmula [1] permite aislar π, de modo que se dispone de un método para calcular el número π al azar. Este hecho atrajo en gran medida la atención y se experimentó muchas veces a lo largo del siglo pasado. Muchos textos de probabilidad mencionan algunas de estas experiencias. Por ejemplo, en 1850 P. Wolf, con una aguja de 8 cm., y una red de paralelas equidistantes, con 10 cm de separación, después de 5.000 pruebas obtuvo 2.532 casos en los que la aguja cortaba alguna paralela y, por tanto, pudo tomar como valor estimado $p = 2.532/5.000 = 0{,}506$, de lo que resulta el valor $\pi = 3{,}159$. Se mencionan otros ejemplos en el libro de Kendall y Moran (*Geometrical Probability,* Griffin, Londres, 1963), aunque en la mayoría de ellos el resultado parece ser demasiado bueno, a tenor del número de pruebas realizadas. Seguro que se aplicó el *optimal stopping*, que consiste en detener la experiencia en un momento favorable, lo que, por supuesto, no es correcto, ni tampoco posible cuando se desconoce el resultado. Una discusión al respecto aparece en Gridgeman, «Geometrical Probability and the Number π» (*Scripta Mathematica*, vol. 25, 1960, 183-195).

De manera más general, si se supone que se conoce π y se busca la probabilidad p o el valor medio E experimentalmente, cualquiera de las fórmulas [2] o [4] permite calcular al azar la longitud L de cualquier curva. Esto hizo que Laplace (*Théorie Analytique des Probabilités,* 1812, p. 359) dijera: «así, se podría utilizar el cálculo de probabilidades para rectificar curvas o cuadrar superficies, pero sin duda los geómetras no harán nunca uso de este medio».

Sin embargo, Laplace se equivocaba. Las fórmulas [2] y [4] se han utilizado a menudo, un siglo después de su afirmación, para medir longitudes de curvas sobre preparaciones microscópicas. Si sobreponemos a una preparación para el microscopio una retícula rectangular (o un haz de paralelas equidistantes) y contamos el número de veces que sus lados o sus paralelas cortan las curvas cuya longitud se desea medir, y giramos varias veces la retícula y tomamos promedios, entonces podremos calcular esas longitudes con bastante aproximación. A este nivel, es más fácil *contar* que *medir.*

Más tarde, a mediados del siglo actual, cuando se dispuso de las computadoras electrónicas, se estuvo en condiciones de simular muchas experiencias aleatorias y de deducir de ellas con una exactitud aceptable (a causa del gran número de experiencias que se pue-

den simular en poco tiempo) los valores de ciertas constantes. Si se prepara un programa, por ejemplo, que permita simular la experiencia de la aguja de Buffon a partir de tablas de números aleatorios que fijen la posición de la aguja, se puede calcular el número π o cualquier elemento de la fórmula [1] si se conocen los restantes.

Ésta es la base del llamado método de Monte Carlo, que ha tenido mucho éxito, no sólo calculando al azar los valores de constantes diferentes, sino incluso para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales, o los valores de integrales definidas, siempre que se puedan planear y simular experiencias en las que estas soluciones estén involucradas de manera aleatoria. Parece que la primera referencia publicada al método de Monte Carlo fue un trabajo de Ulam (*The Monte Carlo Method*, J. American Statistical Association, vol. 44, 1949, 335-341). Este autor y J. von Neumann fueron los primeros que aplicaron el método a problemas de la física, en especial a problemas atómicos (difusión de neutrones). Más tarde, el método ha sido muy utilizado en toda la matemática aplicada. Para su aplicación en la Investigación Operativa, se puede consultar el libro de J. Kohlas, *Monte Carlo Simulation in Operations Research* (Springer, Berlín, 1972).

Capítulo 7

LA PRODUCCIÓN MATEMÁTICA: TEMAS Y MODAS

1. La producción matemática

Los resultados indiscutibles, y bien a la vista, obtenidos por la ciencia en el siglo actual, y la importancia de la matemática en casi todos ellos han motivado una protección, antes inexistente, por parte de la sociedad, de los estudios matemáticos. Se han creado en todas partes becas, premios, subsidios y plazas de investigador para estimular y proteger la dedicación a la matemática. Por otro lado, la extensión de esta ciencia a campos que antes parecían refractarios a ella (como la mayoría de las ramas de las ciencias humanas), y el perfeccionamiento de las técnicas matemáticas que la tecnología moderna ha exigido —ya que necesita cálculos cada vez más perfeccionados y precisos— han motivado un aumento exponencial del número de investigadores matemáticos y, en consecuencia, un aumento de la producción matemática universal.

Las primeras revistas de matemáticas que se crearon en el siglo XVII,[1] aun incluyendo las actas que se publicaban en las Academias fundadas en el mismo siglo,[2] daban un número reducido de volúmenes por año, que fue creciendo lentamente en los siglos posteriores, dividiéndose en especialidades. A pesar de este desarrollo, hasta principios del siglo XX, el número de revistas que contenían trabajos de investigación matemática cabían en las bibliotecas

1. *Le Journal des Savants*, en Francia, en 1664, las *Philosophical Transactions*, en Inglaterra, en 1665, el *Acta Eruditorum*, en Alemania, en 1687.

2. *Accademia dei Lincei* (1603) y la *Accademia dei Cimento* (1657) en Italia, la *Royal Society* de Inglaterra (1645), la *Académie des Sciences*, de París (1666), la *Akademie der Wissenschaften* de Berlín (1700).

convencionales más importantes de cada país. Así, en la mayoría de las universidades se disponía de las colecciones completas de las revistas dedicadas total o parcialmente a la matemática, reconocidas como indispensables para estar informado y poder trabajar sobre la base de un conocimiento completo de lo existente.

A mediados de siglo, en cambio, el incremento de publicaciones científicas manifestó una pendiente tan elevada que en la actualidad es casi imposible disponer, en una sola biblioteca, de todas las publicaciones indispensables para tener una información aceptable y trabajar sin el temor de redescubrir resultados y métodos ya conocidos. Un cálculo aproximado de lo que se publicó en el mundo en forma de trabajos supuestamente originales dentro de la matemática (pura y aplicada) a lo largo del año 1990 lleva a la conclusión de que si los recopilásemos todos en volúmenes de 1.000 páginas, ocuparían más de 400 volúmenes. El cálculo se ha realizado a partir de los trabajos recensionados en la *Mathematical Reviews*, atribuyendo una extensión de cinco páginas a cada uno (evidentemente, una estimación por defecto).

En el momento actual, esta ingente producción matemática plantea serios problemas, de los que comentaremos algunos:

a) Es imposible tener todo el material informativo en las bibliotecas tradicionales. Se intenta resolver el problema pasando los volúmenes tradicionales a microfichas manejadas por ordenadores, que permiten obtener la información sobre cada tema particular y transmitirla después a los aparatos de ampliación y reproducción que convengan.

b) A pesar de ello, todo investigador siente la necesidad de tener en sus manos las revistas originales para poder hacer un repaso rápido de éstas, ya que, a veces, se encuentran ideas importantes para los propios trabajos en artículos que, por su título, en primera instancia no parecían útiles.

Por ello se comienzan a organizar bibliotecas altamente especializadas, con revistas y textos de los temas específicos a los que se dedican los investigadores de la institución que sostiene la biblioteca. Estos temas específicos son cada vez más numerosos. En 1990, en la revista *Mathematical Reviews*, ya citada, se distin-

guen 94 grandes especialidades y algo más de 4.500 subespecialidades. Como ejemplos de temas nuevos aparecidos en las últimas décadas, y a los que están dedicados la mayoría de los trabajos matemáticos publicados, podemos citar: teoría de la comunicación, codificación, criptología, teorías de Shannon sobre la información y su medida, teorías del control, control óptimo y control estocástico. En las aplicaciones a la biología y a las ciencias humanas: biomatemática, tomografía, sociología y psicología matemáticas, lingüística (los trabajos de Chomsky), inteligencia artificial, autómatas, robótica y complejidad. En la física matemática: teoría de cuerdas, espacios de medida, *twistors*, espinores. Se puede decir que las novedades crecen día a día y que es imposible estar informado acerca de ellas si no es por medio de ordenadores y de grupos interdisciplinarios. En la mayoría de las ciencias se trabaja en equipo, y los trabajos aparecen firmados por diversos autores. En matemáticas todavía es común el trabajo individual, o la colaboración en grupos de dos o tres miembros, pero es muy posible que este número deba crecer por la extensión del conocimiento en cada subespecialidad.

2. Algunas modas de los últimos años

La gran cantidad de matemáticas que se producen anualmente, y el gran número de investigadores dedicados a esta producción, de la que han hecho su profesión, provoca que se den algunos fenómenos típicos de las grandes masas, que se dejan influir por determinadas corrientes a las que se dedica mucha gente a lo largo de cierto período, para pasar después a otra rama que parece más interesante o más adaptada a las necesidades del momento. Son las modas, que, al igual que en el vestir y en las costumbres, se aprecian también en la tarea científica y mediante las que se progresa, con impulsos de fuerte entusiasmo pero poco persistentes. Nos referimos a tres modas, relativamente recientes, que prometieron mucho, pero que no han dado, hasta el momento, el resultado que de ellas se esperaba, lo que no quiere decir (es muy probable lo contrario) que no vuelvan a resucitar, o que sus actuales resultados no sean utilizados más adelante para otras modas, formando así olas cíclicas que van poniendo los

cimientos y fortaleciendo las alas del edificio matemático. Nos referimos a las *catástrofes* de R. Thom, los *conjuntos borrosos* de L. A. Zadeh y los *fractales* de Mandelbrot.

3. Las «catástrofes» de René Thom

El primer ejemplo de una moda de los últimos años es el de las «catástrofes» de René Thom. Aunque la parte matemática tiene antecedentes en la obra de H. Whitney en las décadas de los años cuarenta y cincuenta, se considera que el origen de la teoría es el libro de R. Thom *Stabilité Structurelle et Morphogenèse* (Benjamin, 1972).

Se trata, esencialmente, del estudio de los puntos singulares de ciertas curvas algebraicas obtenidas como proyección de variedades con dobleces, a las que se trata de desdoblar a partir de transformaciones. Más exactamente, se estudian correspondencias sobre la recta real de variedades compuestas por puntos representativos de estados y otros que representan parámetros, y se analizan los puntos singulares y su comportamiento para ciertas variaciones pequeñas de los parámetros, así como sus condiciones de estabilidad. El libro de Thom es matemático, pero con la vista puesta en la biología y en la evolución de la forma de los seres vivos, a través de conceptos elaborados por la topología y el álgebra. Se definen y se obtienen siete catástrofes elementales, como base de otras más complicadas. Por el prestigio del autor, matemático de primera fila, la teoría interesó muy pronto y fue objeto de estudio en los ambientes matemáticos, pero al mismo tiempo, seguramente por el atractivo nombre elegido («catástrofes»), y también por el carácter mágico de su número (7), atrajo la atención y despertó un gran entusiasmo entre los no matemáticos y los usuarios accidentales de la matemática.

Estalló una gran euforia por la teoría de las catástrofes y se quiso aplicar la teoría a los fines más diversos, como la mecánica de fluidos, el diseño de barcos, la termodinámica, la economía, los modelos sociales, la división celular y la teoría de mercados, entre otros. Entre los partidarios fanáticos de la teoría destacó el matemático E. C. Zeeman (*Catastrophe Theory: Selected Papers*, 1972-1977, Addison Wesley, 1977), que llegó a describir las

catástrofes como el desarrollo más importante de la matemática desde la invención del cálculo infinitesimal, 300 años atrás (anuncio de una conferencia de Zeeman en la Northwestern University, 1977). Los periódicos y las revistas no especializadas hicieron muchos elogios; el *London Times*, al comentar el libro de Thom mencionado afirmaba: «En cierto sentido es el único libro que se puede comparar con los *Principia* de Newton.»

Junto con este entusiasmo, comenzaron a aparecer también las críticas y el escepticismo sobre el alcance de la teoría, sobre todo por parte de algunos no matemáticos. Hay que mencionar entre sus detractores a H. Sussmann y R. S. Zahler («Catastrophe Theory», *Synthese*, 31, 1975, 229-270 y 37; 1978, 117-216). El eco de la teoría se prolongó durante toda la década de los setenta y pasó pronto, como todas las modas, al olvido. Sin embargo, en tanto que teoría matemática de las singularidades de ciertas correspondencias de variedades en otras, los trabajos de Thom y sus colaboradores fueron una contribución interesante para la matemática que perdurará siempre. Tal vez la opinión más equilibrada sobre el tema sea la de S. Smale, en el libro de Zeeman antes citado, publicada en el *Butlletin of the American Mathematical Society* (vol. 84, 1978, pp. 1360-1368), y la de Martin Golubitsky, en el libro posterior de T. Poston y J. Steward (*Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, Londres, 1978), publicada en el mismo *Butlletin* (Nueva Serie, vol. 1, 1979).

Es un ejemplo típico de moda efímera, debida al carácter mágico de un nombre (*catástrofes*), al hecho real de que haya exactamente siete catástrofes elementales (como las trompetas del Apocalipsis), y a las posibilidades, no comprobadas por completo, de sus aplicaciones en todos los problemas y en todos los misterios, casi como pretendía el papiro Rhind tres mil años antes. Si en lugar de *teoría de catástrofes* se hubiera llamado *teoría de singularidades*, seguramente que su éxito popular hubiera sido menor.

4. Los conjuntos borrosos de Zadeh

Uno de los descubrimientos más trascendentales de la matemática en el siglo XIX fue la teoría de conjuntos de Georg Cantor

(1845-1918). Se trataba de una lucha victoriosa con el infinito, que Cantor consiguió ordenar y clasificar y que, a pesar de las muchas paradojas que originó —pero que contribuyeron al progreso de la lógica matemática— se impuso rápidamente en toda la matemática como herramienta indispensable de trabajo.

La teoría de conjuntos entró en la matemática por su parte superior, pero su influencia fue invadiendo todos los niveles y se convirtió en el lenguaje común de toda la matemática desde los cursos más elementales. Ante un conocimiento tan firme y entendido, es comprensible que en 1965 provocara cierta sorpresa y curiosidad la introducción de L. A. Zadeh de los llamados *conjuntos borrosos* (*Fuzzy sets, Information and Control*, vol. 8, 1965, 338-353). También se les ha llamado *difusos, suaves, vagos, no nítidos,* entre otras denominaciones más o menos equivalentes, pero ha prevalecido, en castellano, la nomenclatura de *conjuntos borrosos* (en inglés, *fuzzy*; en francés, *flou*; en alemán, *unscharf*; en catalán, *difús*).

La idea es muy simple. Se trata de conjuntos para los que la condición de pertenencia para un cierto objeto x viene determinada por una cierta probabilidad $p(x)$. Si esta probabilidad tiene sólo los valores 1 (pertenencia) y 0 (no pertenencia), se trata de un conjunto ordinario. Si $p(x)$ puede tomar diversos valores entre 0 y 1, tenemos un conjunto borroso. Se entiende que los conjuntos borrosos son de gran utilidad para ofrecer un tratamiento de los conceptos imprecisos, como *joven, alto, bajo, bueno, simpático,* etc. Tal vez por la simplicidad de su definición y por la atracción que provoca la posibilidad de aplicarla a casi todas las ramas del conocimiento, la teoría de conjuntos borrosos se extendió rápidamente por todo el mundo. Numerosos trabajos serios y artículos de divulgación o esbozos de proyecto hicieron que la moda de los conjuntos borrosos se extendiera y afirmara en todo el mundo. Se hicieron aplicaciones en la estadística (su campo natural) y también en la lingüística, la lógica y la semántica, así como en la ingeniería (seguridad en las construcciones) y en la medicina (pronósticos y diagnósticos por ordenador) y, obviamente, en la propia matemática (teoría de funciones de variables borrosas).

También existen aplicaciones en muchos otros campos (teoría de la decisión, reconstrucción de patrones, optimización y control,

etcétera). Para más detalles y bibliografía se puede consultar el libro de F. Azorín Poch, *Algunas aplicaciones de los conjuntos borrosos a la Estadística* (Madrid, 1979) y la *Introduction a la theorie des sous-ensembles flouos* (Masson, París, 1975), de A. Kaufmann. Para aplicaciones a la ingeniería estructural es recomendable el interesante fascículo de A. J. Bignoli, *Variables estacionarias y conjuntos difusos* (Buenos Aires, 1985).

Podemos hallar un comentario atractivo sobre los conjuntos borrosos en el siguiente párrafo del propio Zadeh, en el prólogo de la traducción castellana del libro de Kaufmann antes citado: «La teoría de los subconjuntos borrosos es, de hecho, un paso hacia un acercamiento entre la precisión de las matemáticas clásicas y la sutil imprecisión del mundo real, un acercamiento nacido de la incesante búsqueda humana para lograr una mejor comprensión de los procesos mentales del conocimiento. Por el momento, somos incapaces de fabricar máquinas que puedan rivalizar con el hombre en la ejecución de tareas como: reconocimiento de muestras, traducción de los idiomas, comprensión de la intención, de la abstracción, de la generalización, de la toma de decisiones bajo incertidumbre, y, sobre todo, resumir información. En gran medida, nuestra incapacidad para fabricar tales máquinas se explica por la diferencia fundamental que existe entre la mente humana, por una parte, y la inteligencia de la máquina, por otra. Esta diferencia proviene de la aptitud del cerebro humano (aptitud que las computadoras actuales no poseen) para pensar y razonar en términos imprecisos, no cuantitativos, *borrosos*. Es esta falta de aptitud la que hace que las computadoras más imponentes y más sofisticadas sean incapaces de comunicarse con los humanos empleando lenguajes naturales y exijan lenguajes artificialmente construidos.»

Sin embargo, tanto los desarrollos teóricos como las aplicaciones prácticas, que despertaron grandes esperanzas desde el principio (1965), comenzaron a declinar a lo largo de la década de los ochenta, a pesar de haber sido, y continuar siendo, una teoría interesante que ha permitido tratar matemáticamente problemas de datos definidos con escasa exactitud y ofrecer soluciones a aquéllos, también forzosamente borrosas, pero bastante útiles en la práctica.

5. Los fractales de Mandelbrot

Pensemos en la geometría del plano. La idea intuitiva y tradicional que se tiene de una curva consiste en la trayectoria de un punto que se mueve de manera continua, sin dar saltos. Si esto es así, el punto debe tener en cada momento una dirección de llegada y una de salida. Si ambas tangentes coinciden, se dice que la curva tiene una tangente única en el punto considerado y que el punto es regular.

En base a esta idea intuitiva, hasta casi mediados del siglo XIX, sólo se consideraron y estudiaron curvas con todos, o casi todos, sus puntos regulares. Pero al ir afinando la idea de curva y considerarla, no como trayectoria, sino como la gráfica de una función, comenzaron a aparecer curvas raras o patológicas. Se hallaron curvas, como la clásica de Weierstrass, sin ninguna tangente en ningún punto, y otras, como la de Peano, que llenaban un área. Desde el principio, estas patologías fueron consideradas como curiosidades matemáticas sin ningún otro interés para su estudio.

A pesar de esto, a mediados del siglo XX, gracias en parte a los ordenadores, que permitían generar esta clase de curvas, al menos hasta cierta aproximación, se les prestó más atención. Por ejemplo, puesto que no se podía hablar de su longitud, que tenía un valor infinito para cada una de ellas, se introdujo el concepto de *dimensión,* que permitió al menos clasificarlas de cierta manera. Como esta dimensión podía resultar ser un número fraccionario, a estos objetos geométricos se les llamó *fractales* (el nombre se debe a Mandelbrot, en su libro *Fractals: Form, Chance and Dimension*, Freeman, San Francisco, 1977), aunque, como el propio Mandelbrot admite, ya se conocían ejemplos con anterioridad.

La definición de dimensión que se suele tomar es la establecida por Hausdorff en 1919 (*Mathematische Annalen,* vol. 79, 157-179). Se comienza por definir la medida s-dimensional de un conjunto de puntos E, por el límite del ínfimo de la suma de las potencias s-ésimas de los diámetros de los subconjuntos de diámetro menor que un cierto valor a que forman un recubrimiento de E, con a tendiendo a cero. La dimensión de E se define entonces como el ínfimo de s entre todos los valores que hacen que la medida de dimensión s sea nula, o bien como el supremo de los valores de s que hacen que dicha medida valga infinito.

Con esta definición es fácil ver que la dimensión de una curva ordinaria vale 1, y que la dimensión de un conjunto discreto de puntos vale 0. Para el conjunto de puntos (llamado conjunto ternario de Cantor) que queda en un segmento después de sacar la tercera parte (dejando los puntos extremos) y de repetir después la misma operación con los segmentos restantes, y así, consecutivamente, un número infinito de veces, la dimensión resulta ser log 2/log 3 = 0,6309...

Un ejemplo simple y muy conocido de fractal es la curva de Koch, o copo de nieve. Se parte de un triángulo equilátero de lado 1, cuyos lados se sustituyen por la poligonal que se obtiene al sustituir su tercera parte por dos segmentos de longitud 1/3, y así sucesivamente. En sus primeros pasos, la curva de Koch es el contorno de la figura 7.1. Su dimensión es log 4/log 3 = 1,2619...

Si se parte de un segmento de longitud 1, se divide en cuatro partes iguales y sobre la segunda y la tercera parte se construyen cuadrados de lado 1/4, uno a cada lado del segmento primitivo, y se procede consecutivamente de forma análoga, en el límite obtenemos otro fractal, esta vez de dimensión 1,5.

Se pueden obtener también fractales superficiales, que sean límites de áreas en lugar de límites de curvas. El más simple y conocido es el llamado tamiz (*gasket*) de Sierpinski, que se obtiene a partir de un triángulo de lado 1 del que se suprime el triángulo equilátero de lado 1/2, cuyos vértices son los puntos medios de los lados primitivos (dejando el contorno) y se procede sucesivamente con la misma regla. Se obtiene el fractal cuyos primeros pasos se representan en la figura 7.2. Su dimensión es log 3/log 2 = 1,5849...

Otro ejemplo de fractal superficial se obtiene al tomar un cua-

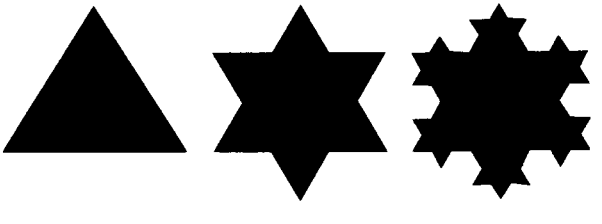


FIGURA 7.1

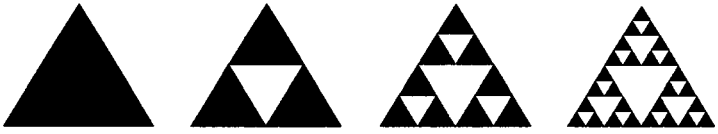


FIGURA 7.2

drado de lado 1, dividirlo en 9 cuadrados de lado 1/3 por paralelas a los lados y extraer el cuadrado central. Si repetimos la operación con todos los cuadrados que restan, en el límite obtenemos un fractal de dimensión log 8/log 3 = 1,8927..., llamado *alfombra* de Sierpinski (figura 7.3).

Es curioso observar que algunos fractales se obtienen a partir de procesos al azar. Consideremos un rectángulo cualquiera, y sean C_1, C_2, C_3, tres de sus vértices. Se escoge un punto arbitrario P_1 dentro del rectángulo, y también uno de los vértices C_1, C_2, C_3, al azar. Si sale, pongamos por caso, el vértice C_2, se une P_1 con C_2 y se señala el punto medio P_2 del segmento $P_1\ C_2$. Se repite la operación a partir de P_2 (en la figura 7.4 ha resultado escogido otra vez C_2, y después C_1, etc.). Si repetimos la operación un número suficientemente grande de veces (si se quiere se puede construir un programa en BASIC para ir obteniendo las coordenadas de los puntos P_n) se observa que en el límite se van dibujando los vértices del tamiz de Sierpinski que corresponde al triángulo $C_1C_2C_3$ (figura 7.4).

La construcción anterior se llama el *Juego del Caos* y se puede generalizar escogiendo al azar ciertas transformaciones afines del plano que no permiten la dispersión de los puntos interiores al rec-

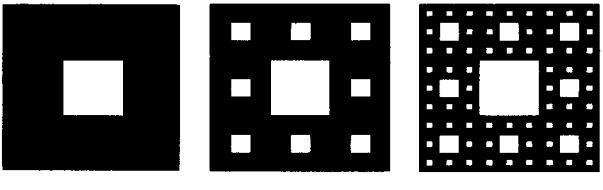


FIGURA 7.3

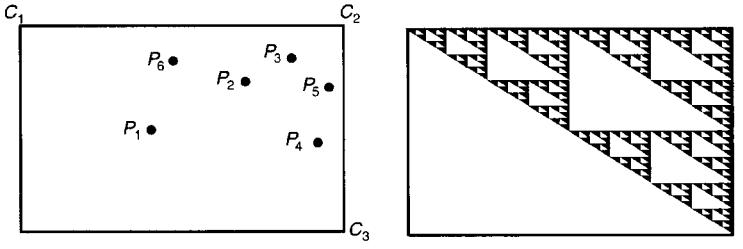


FIGURA 7.4

tángulo de partida. Los resultados pueden ser fractales de formas muy diferentes e inesperadas. Se puede consultar el libro de H. O. Peitgen y D. Sampe, *The Science of Fractal Images* (Springer, 1988).

Estos ejemplos de fractales no pasan de ser casos notables, meras curiosidades. La verdadera importancia de los fractales estriba en su obtención a partir de la iteración de transformaciones (que pueden ser muy simples) del plano complejo sobre sí mismo. Por ejemplo, si c es un número complejo y se itera la función $c \to c^2 + c$, obtenemos consecutivamente los puntos c, $c^2 + c$, $(c^2 + c) + c$..., etc. (lo que se puede llevar a cabo con facilidad gracias a los ordenadores). Entonces, los puntos c se clasifican en función de si sus iterados se mantienen siempre a distancia finita, o bien se alejan indefinidamente. Los primeros constituyen el famoso fractal de Mandelbrot, muy complicado a pesar de su definición simple, y que ha dado lugar a muchos estudios pioneros en la materia (figura 7.5).

También se pueden considerar, en el plano complejo Z, transformaciones del tipo $z \to z^2 + c$ y buscar conjuntos de puntos z tales que los iterados de los z se mantengan siempre a distancia finita, o bien los conjuntos de puntos z tales que los iterados de los z se alejen infinitamente. La frontera entre ambos conjuntos se llama el *conjunto de Julia* de la función $z \to z^2 + c$ y es un fractal que para ciertos valores de la constante c puede ser muy complicado e interesante.

Por ejemplo, para el número complejo c, cuya parte real es 0,12256..., y la parte imaginaria 0,744861... (que es una raíz de la ecuación $c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0$) el conjunto de Julia es el fractal llamado *conejo de Douady* (figura 7.6).

Para toda iteración de una función dada, si coloreamos de mane-

FIGURA 7.5

ra adecuada los conjuntos de puntos cuyo transformando n-ésimo está entre ciertos límites, se obtienen a veces figuras muy atractivas, de cierto valor estético incluso, lo que ha contribuido a la moda de los fractales, combinación de matemática pura, técnica computacional y fantasía o creación plástica.

Cada día aparecen más aplicaciones de los fractales en temas de la biología, la física del sólido, la astronomía y, no hace falta decirlo, de la matemática pura, pero la importancia que en el futuro puedan tener estas aplicaciones está en discusión. Se puede hallar una exposición histórica excelente de los fractales en el prólogo del libro antes mencionado *The Science of Fractal Images*, escrito por B. Mandelbrot, su creador y principal impulsor.

6. Sistemas dinámicos y caos

Los fractales tienen relación con los llamados *sistemas dinámicos* y, en especial, con los *sistemas caóticos*, que han sido objeto de estudios matemáticos profundos, y lo continúan siendo. Sin entrar en definiciones técnicas precisas, cabe decir que un sistema dinámico es un proceso en el que interviene la variable tiempo para definir un estado de cosas. A veces, los sistemas dinámicos están per-

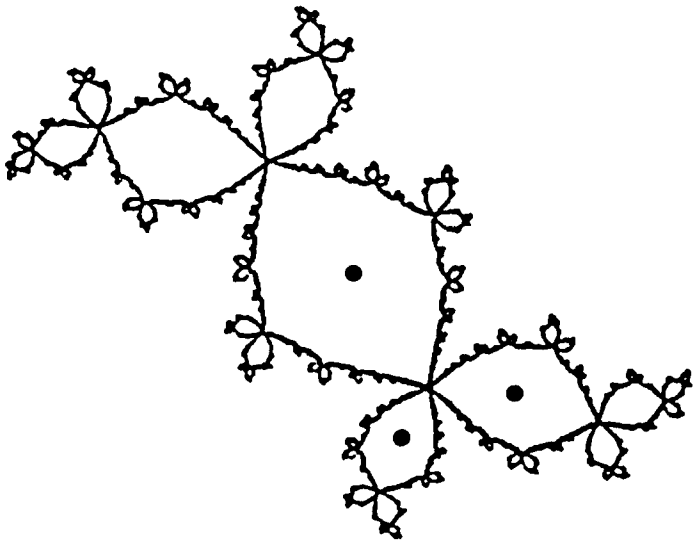


FIGURA 7.6

fectamente determinados, como en el caso del sistema solar o el de la propagación de ciertas ondas o fluidos, pero otras veces la determinación es difícil o prácticamente imposible, como sucede con la evolución del estado del tiempo meteorológico en una región determinada (temperatura, presión, nubosidad, vientos, etc.). Esta dificultad puede provenir del gran número de variables que intervienen, pero a veces se obtienen situaciones imprevisibles incluso con pocas variables, como es el caso de las llamadas *situaciones caóticas*. Es característico de estos sistemas caóticos que una pequeña alteración en las condiciones iniciales pueda producir grandes modificaciones en el estado del sistema al transcurrir el tiempo. Se ha mencionado, a título de ejemplo, el *efecto mariposa,* que consiste en la posibilidad de que el efecto de un pequeño aleteo de una mariposa en la India, al mover el aire de alrededor y al propagarse este movimiento, se vaya multiplicando y provoque un tornado en las Bermudas.

Un caso sencillo, muy fácil de calcular con una calculadora de bolsillo y, huelga decirlo, fácil de programar en una micro-

computadora, consiste en la iteración de la transformación $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ para $n = 0, 1, 2, 3...$ Si se parte del valor inicial $x_0 = 0{,}5$, se obtiene la sucesión simple 1, 0, 0... En cambio, basta con una pequeña variación y considerar $x_0 = 0{,}4$ para obtener ahora: 0,960 – 0,154 – 0,520 – 0,998 – 0,006 – 0,025 – 0,099..., i.e., una sucesión de valores que parece (y es en realidad) dada al azar. Es decir, pequeñas variaciones en la condición inicial x_0 pueden provocar comportamientos muy distintos en la sucesión que se obtiene.

Esta transformación $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$, donde a es una constante arbitraria, se suele llamar *ecuación logística,* y ha sido muy importante en la historia de los comportamientos caóticos de los sistemas biológicos. Esta transformación expresa que el número de individuos de una especie es proporcional a su cantidad en el período anterior, pero también a la saturación de esta cantidad, puesto que la carencia de alimentos impide el crecimiento cuando el número se acerca al máximo posible. Existen muchos trabajos sobre el tema. Robert May, en un artículo publicado en la revista *Nature* en 1976, afirma: «Sería muy bueno proveer a todos los alumnos de las escuelas elementales de una calculadora de bolsillo y que se les incitara a jugar con la ecuación logística, cuyo cálculo simple les ayudaría a deshacerse de los prejuicios adquiridos por una educación estándar sobre las posibilidades de la naturaleza. De esta manera, se transformarían los conceptos de mucha gente sobre diversos temas, desde los ciclos económicos a la propagación de rumores. Conviene educar en el caos. A pesar de la perfección lograda por la matemática lineal, ésta no es adecuada para un mundo terriblemente no lineal. La intuición matemática con que se prepara a los alumnos no sirve para afrontar los comportamientos extraños que aparecen en muchos sistemas discretos no lineales. Todo iría mejor, no sólo en la investigación sino también en el mundo cotidiano de la política y de la economía, si hubiera más gente que tomara conciencia del hecho de que los sistemas no lineales elementales pueden presentar propiedades dinámicas nada simples» (James Gleick, *La théorie du caos,* París, 1989).

Hay fractales, como la curva de Koch, el *tamiz* y la *alfombra* de Sierpinski y otros deducidos por iteración de funciones del plano complejo, que se obtienen a partir de la reproducción consecu-

tiva de una misma figura con una forma parecida, aunque de medida cada vez más reducida. Estos fractales se denominan *autosemejantes.* No obstante, la mayoría de los fractales, como el mencionado fractal de Mandelbrot, o el conejo de Douady, no son autosemejantes: si se itera la operación que los origina, van apareciendo paisajes variados y diversos, cada vez más evanescentes (como los diferenciales de Newton), como si se tratara, a medida microscópica, de nuevos descubrimientos geográficos de un mundo fantástico contenido en lo infinitamente pequeño.

Podemos comparar este fenómeno con el que hallaron los pitagóricos al descubrir los irracionales. Un número racional, sobre la recta real, da lugar a un desarrollo decimal periódico, de manera que toda su sucesión numérica es bien conocida aunque conste de infinitos términos. En cambio, para un número irracional, el desarrollo decimal no es periódico y, en consecuencia, no se puede conocer la cifra correspondiente a un lugar determinado sin calcular primero todas las precedentes. En este punto, aparecen hechos notables que fueron estudiados por Borel y que vamos a exponer con brevedad. Cuando la frecuencia de todas las cifras 0, 1, 2..., 9 en el desarrollo de un número real es la misma para todas ellas, y, por tanto es igual a 1/10, se dice que el número es *normal.* Si sucede lo mismo para cualquier otro sistema de numeración de base no decimal, sea el que sea, se dice que el número es *absolutamente normal.* Se puede demostrar que la probabilidad de que un número real cualquiera sea absolutamente normal es igual a 1, es decir, que todos los números reales —dejando aparte los de medida nula— son absolutamente normales. Esto no significa que, dado un número real cualquiera, pongamos por caso el número π, se pueda decidir, o no, si es absolutamente normal, ni tan siquiera si es normal. Por otro lado, es fácil demostrar que si un número es absolutamente normal, hay probabilidad 1 de que cualquier combinación de cifras, por grande que sea su número, aparezca en el desarrollo decimal del número en cuestión.

Por tanto, si suponemos que las letras del alfabeto, mayúsculas y minúsculas, más los signos de puntuación, constituyen un total de 100 caracteres de imprenta diferentes, y adoptamos un sistema de numeración de base 100, de manera que sus 100 cifras representen los caracteres de imprenta mencionados, podremos decir, siguien-

do a Borel, que «un número irracional, como π, o log 3, estará escrito en este sistema de numeración según una serie ilimitada de páginas en las que los caracteres se sucederán según una ley aritmética que desconocemos, pero que está rigurosamente determinada por la definición misma del número considerado. Si este número es absolutamente normal, todas las agrupaciones de caracteres son igualmente probables y, por consiguiente, prolongando cuanto sea necesario la escritura de este número, estamos seguros de que hallaremos, con la frecuencia que se desee, todas las agrupaciones posibles. Si escribimos el número π, que suponemos absolutamente normal en este sistema de numeración, hallaremos, entonces, tarde o temprano, la página que ahora estoy escribiendo, como también se hallará el texto completo de las obras de Victor Hugo y también el texto de los periódicos que aparecerán de aquí a un siglo, si es que en esa época va a haber periódicos. Todo ello está contenido en el número π, junto con muchas otras cosas».

Es posible que algo parecido suceda con los fractales no autosemejantes y que, tarde o temprano, aparezca entre sus paisajes cualquiera de las pinturas existentes en la actualidad, con toda la aproximación que se nos antoje.

7. La geometría fractal

Según Mandelbrot, la geometría de Euclides está basada en nuestra intuición del mundo exterior, aunque esquematizada para suavizar contornos y alisar singularidades. La recta y el plano (como también las curvas especiales que estudia la geometría clásica —cónicas, cicloide, cardioide, catenaria, etc.— y las superficies de los poliedros, de la esfera o de otros objetos en el espacio) son lisos; es decir, tienen rectas o planos tangentes a casi todos los puntos. Pero la naturaleza tiene este aspecto sólo por la aproximación con la que nuestros sentidos pueden observarla y por la abstracción simplificadora que de ella hacemos. «La geometría de la naturaleza —dice Mandelbrot— es caótica y está mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo diferencial [...] entre el caos incontrolado y el orden excesivo de Euclides se halla el orden fractal.»

Si nuestros ojos fuesen microscopios electrónicos, seguro que nuestro concepto del mundo y de sus formas sería muy distinto. Una pata de mosca o una gota de nuestra sangre presentan aspectos muy diferentes contemplados a simple vista o a través del microscopio. En este sentido, los fractales y su geometría pueden ser mucho más reales que la geometría intuitiva y las variedades que trata la geometría clásica. En los sistemas reales aplicados al mundo real, nuestra escala del tiempo también juega un papel esencial. Si la duración de nuestra vida fuese del orden de miles de años, en lugar de unas pocas decenas, nuestro concepto y visión del universo serían muy distintos. Ahora, por ejemplo, si consideramos el universo visible a simple vista, parece de hecho estable. Las constelaciones (Orión, Escorpio, Cruz del Sur, Osa Mayor, etc.) aparecen estables: por lo que sabemos no han sufrido ninguna alteración a lo largo de la historia de la humanidad de la que tengamos constancia (unos 4.000 años). Pero este tiempo es insignificante comparado con el de la edad de la Tierra (5.000 millones de años) o del universo (15.000 millones de años). Si el sistema solar, que parece tan estable y tan bien conocido desde la ley de la gravitación y el cálculo infinitesimal, fuera percibido durante miles de años, se observarían en él irregularidades: nacimiento y muerte de satélites, disgregación de planetas y choques de cuerpos celestes. Es decir, la estabilidad de nuestro entorno se debe sólo al hecho de que solamente vemos de él una fotografía instantánea, como un relámpago entre dos eternidades. El universo, si tomamos tiempos de medida grandes, es, seguro, turbulento y caótico.

Es muy probable que con el poder de los actuales medios de observación y las posibilidades de cálculo de las modernas computadoras estemos entrando en una Ciencia Nueva II, la segunda parte de la Ciencia Nueva I de Galileo, que se originó con las modestas observaciones de los primeros telescopios, con relojes primitivos para medir solamente hasta décimas de segundo y con un sistema de numeración capaz tan sólo de representar funciones simples y de hacer cálculos con números de pocas cifras y pocos decimales. Hoy se conoce el número π con mil millones de decimales y podemos hacer operaciones y resolver complicadas ecuaciones en pocos segundos. Es consecuencia de esto el que nos hallemos ante un mundo caótico, en lugar de en el mundo, orde-

nado con perfección divina, de Kepler, Galileo y Laplace. Se ha roto el antiguo orden y la antigua ley. Nos esperan nuevos órdenes y nuevas leyes para un universo intelectual y materialmente turbulento y caótico. Es el desafío que afronta la humanidad al final del segundo milenio.

CAPÍTULO 8

GEOMETRÍA INTEGRAL. GEOMETRÍA ESTOCÁSTICA

1. Geometría integral

Según la definición clásica, la probabilidad de un acontecimiento es igual al cociente entre el número de casos favorables y el total de casos posibles. Esto funciona cuando ambos números son finitos, como sucede, pongamos por caso, en los juegos de dados. Cuando se empezaron a considerar las probabilidades geométricas, en las que tanto los casos favorables como los posibles son infinitos, se tuvo que sustituir el *número* de casos por su *medida.* La costumbre que se tenía desde la Antigüedad de medir conjuntos de puntos fue el origen de los conceptos de longitud para los puntos de una curva, de área para los puntos de una superficie y de volumen para los puntos del espacio.

Con el problema de la aguja de Buffon surgió la necesidad de medir conjuntos de segmentos congruentes (o bien, si se prefiere, conjuntos de posiciones de una misma aguja). Al principio, esto se hizo de una manera intuitiva e imprecisa, midiendo el área de los puntos cubiertos por el punto medio de la aguja y después el ángulo que la aguja podía girar alrededor de aquel punto para cortar (o no) a alguna paralela. Hasta la segunda mitad del siglo pasado se avanzó muy poco en esta dirección y se mantuvo la imprecisión en la medida de las posiciones de los elementos geométricos, a excepción del punto. El primero en atender al problema fue el inglés M. W. Crofton (1826-1915), que observó que algunas discrepancias que aparecían en este tipo de problemas se debían a «ciertas imprecisiones del instrumento utilizado y que los conceptos básicos, como los de cualquier tema nuevo, tendrían que ser revisados

repetidas veces y con paciencia, demostrándolos y corrigiéndolos a la luz de las experiencias y comparaciones para podarlos de cualquier error» (Crofton, «On the Theory of Local Probability Applied to Straight Lines Drawn at Random in a Plane», *Phil. Trans. Royal Soc.*, 148, Londres, 1869, 181-199).

Con este objetivo, Crofton empieza con la definición de lo que debe entenderse por rectas dadas al azar y por medida de conjuntos de rectas. Una recta del plano viene determinada por su distancia p a un origen de coordenadas, y por el ángulo α que la perpendicular a la recta por este origen forma con el eje x. De esta forma, cada recta viene determinada por un punto del plano, cuyas coordenadas son p y α, entendiendo que la distancia p puede variar de cero a infinito, mientras que el ángulo α varía entre cero y 2π (es decir, 360°). Entonces, según Crofton, para medir conjuntos de rectas tomaremos el área cubierta por los puntos del plano que las representan. Con esta definición, el problema de medir conjuntos de rectas del plano se transforma en otro equivalente que consiste en medir conjuntos de puntos, es decir, en medir áreas. Así, según Crofton, no es difícil calcular que la medida del conjunto de rectas que cortan a una curva convexa C_0 es igual a su longitud $L(C_0)$. Es más, si consideramos una curva C cualquiera contenida en el interior de C_0, el valor medio (o esperanza matemática) del número n de puntos en los que la recta dada al azar corta a C si corta a C_0, vale

$$E(C) = 2L(C)/L(C_0) \qquad [1]$$

Obsérvese que si la curva C es convexa, entonces $n = 2$ si la recta la corta, y $n = 0$ si no la corta (puesto que los casos de tangencia forman conjuntos de medida nula) y que, por tanto, el valor medio coincide con la probabilidad. De esto resulta que si se sabe que una recta corta a una curva convexa, C_0, la probabilidad de que también corte a otra curva convexa C, contenida en su interior, es igual al cociente de las longitudes de las dos curvas: $L(C)/L(C_0)$.

Si en lugar del plano se considera el espacio de tres dimensiones, junto con los clásicos conjuntos de puntos cuya medida es el volumen (si son tridimensionales), o el área (si son bidimensionales) o la longitud (si se trata de una curva), aparece el problema de

definir una medida para conjuntos de rectas y para conjuntos de planos. Tomemos conjuntos de rectas. Puesto que cada recta del espacio viene determinada por cuatro parámetros, se puede representar cada una de ellas por un punto de cierto espacio de cuatro dimensiones y definir la medida de un conjunto de rectas por la medida del conjunto de los puntos correspondientes. Resulta entonces que la medida del conjunto de rectas que cortan a una superficie convexa S_0 de área $A(S_0)$ es igual al producto $(\pi/2)A(S_0)$. Si prescindimos del coeficiente, que es accidental y que depende de la unidad de medida, tenemos que, así como la medida del conjunto de puntos que limita una superficie del espacio convexa y cerrada es igual al volumen del cuerpo que limita, la medida de las rectas que la cortan es igual al área de la superficie. En términos probabilísticos, esto significa que la probabilidad de que una recta dada al azar, que se sabe que corta a una superficie convexa cerrada S_0, corte también a otra superficie convexa S contenida en su interior es igual al cociente de las áreas $A(S)/A(S_0)$.

Más generalmente, si tenemos una superficie S cualquiera, no necesariamente convexa ni cerrada, contenida en S_0, el valor medio del número de puntos n en los que S es cortada por una recta al azar que sabemos que corta a S_0, vale

$$E(C) = 2A(S)/A(S_0) \qquad [2]$$

Resta ahora por definir una medida para conjuntos de planos del espacio. Cada plano depende de tres parámetros y, por tanto, la medida en cuestión tendrá que ser un volumen en un espacio tridimensional. Definida de manera adecuada esta representación de los planos a partir de puntos, resulta que la medida del conjunto de planos que cortan una superficie convexa cerrada S_0 es, precisamente, la llamada *curvatura media*, $M(S_0)$, que ya había sido definida por Euler y por Gauss a finales del siglo XVIII. Esta curvatura media también es igual a la anchura media, es decir, salvo factor constante, igual al valor medio de las anchuras de S_0 según todas las direcciones del espacio (la anchura es la distancia entre dos planos paralelos que se apoyan en S_0 y que la comprenden entre ellos). Esto equivale a decir que la probabilidad de que un plano dado al azar, que sabemos que corta a S_0, corte también una superficie con-

vexa S contenida en su interior es igual al cociente de las curvaturas medias, es decir, a $M(S)/M(S_0)$.

Otros resultados importantes relativos a conjuntos de planos del espacio son:

a) Si C_0 es una curva cualquiera contenida en S_0, y n es el número de puntos en los que C_0 es cortada por un plano dado al azar que sabemos que corta a S_0, el valor medio del número n es igual a

$$E(n) = L(C_0)/M(S_0) \qquad [3]$$

b) Si S es una superficie cualquiera contenida en S_0 y L^* es la longitud de la intersección de S con un plano arbitrario que sabemos que corta a S_0, el valor medio de L^* vale

$$E(L^*) = (\pi^2/2)(A(S)/MS_0)) \qquad [4]$$

De esta manera se obtiene el valor de la curvatura media (más exactamente, de la integral de curvatura media) de una superficie del espacio convexa y cerrada, y se pone de manifiesto con claridad que las características primeras de una superficie así son: el volumen (medida de sus puntos interiores), el área (medida de las rectas que la cortan) y la curvatura media (medida de los planos que la cortan).

Como ejemplos de cálculos de curvatura media (M) tenemos los siguientes. Para una esfera de radio r, M vale $4\pi r$. Para una lámina convexa plana de perímetro u, tenemos que M vale $(\pi/2)u$, y para un segmento de longitud h, M vale πh, considerando, en estos últimos casos, la lámina y el segmento como superficies convexas degeneradas. Para un poliedro convexo cuyas aristas tengan longitudes a_i y los ángulos diedros correspondientes sean a_i, la curvatura media es igual a la mitad de la suma de los productos $a_i\,(\pi - \alpha_i)$.

Con las fórmulas anteriores se pueden resolver problemas de probabilidades geométricas en el espacio, pero en cierto sentido su interés es más teórico que real, porque tratan de experiencias difícilmente realizables. A modo de bibliografía básica, se pueden men-

cionar a este respecto el libro de E. Czuber, *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte* (Teublenr, Leipzig, 1884); el de R. Deltheil, *Probabilités Géometriques* (Gauthier-Villars, París, 1926). Más moderno es el de D. G. Kendall y P. A. P. Moran, *Geometrical Probability* (Griffin, Londres, 1963).

De todas formas, desde principios de siglo, estas cuestiones comenzaron a interesar más a los geómetras que a los probabilistas y se obtuvieron resultados de puro interés geométrico. Se hicieron generalizaciones a espacios multidimensionales y a las geometrías no euclidianas. Además, se justificaron las medidas y los valores medios que hemos mencionado, por su invariancia respecto del grupo de los movimientos del plano o del espacio, y así la teoría se vinculó con la teoría de los grupos continuos. También se obtuvieron algunas desigualdades, como la clásica desigualdad isoperimétrica, de puro interés geométrico, y se generalizaron los resultados a los espacios complejos. De todo esto nació la geometría integral, de naturaleza esencialmente teórica, sin que se vislumbrara ningún tipo de interés probabilista o práctico. El nombre *geometría integral* fue introducido por W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie* (3.ª ed., Berlín, 1955). Sus resultados se vincularon con la teoría de grupos de Lie, para fundamentar la invariancia de las medidas de los elementos considerados, y con la teoría de formas diferenciales exteriores, como herramienta de cálculo. Los problemas, originados por el simple problema de la aguja de Buffon, fueron adquiriendo la marca de teoría matemática. Las posibles aplicaciones no eran tomadas en consideración. Se puede consultar la bibliografía sobre el tema, y una recopilación de algunos de los resultados obtenidos hasta su publicación, en: L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability* (Addison Wesley, 1976).

2. La medida cinemática

Una vez definida una medida para conjuntos de puntos, para conjuntos de rectas y para conjuntos de planos, queda todavía el problema de definir una medida para conjuntos de figuras congruentes cualesquiera, por ejemplo, conjuntos de polígonos o de curvas de cualquier forma, pero congruentes entre sí. Comencemos por el

caso del plano. Sea K una figura del plano de cualquier forma y tamaño. Para fijar su posición, bastará con dar un punto $P(x,y)$ invariablemente unido a K, más el ángulo α que forma una dirección por P, unida a la figura K, con una dirección fijada del plano (por ejemplo, el eje x). Por tanto, mientras que basta con dar dos coordenadas tanto para determinar la posición de un punto (la de x y la de y) como para determinar una recta (la p y la x), para determinar la posición de una figura indeformable se necesitan tres coordenadas (x, y, α).

Si sobre cada punto P del plano se levanta una perpendicular sobre la que tomamos el valor de α (medido en radianes), tendremos para cada posición de K un punto del espacio (de coordenadas x, y, α), que podremos representar por K^*. Para medir conjuntos de posiciones de la figura K (o bien, puesto que es lo mismo, conjuntos de figuras congruentes con K), bastará con tomar el volumen cubierto por los puntos K^* que representen las posiciones de K según la representación anterior.

Esta definición de medida para conjuntos de posiciones de una figura plana no se ha elegido por capricho. Se ha llegado a ella por el mismo criterio que preside toda la teoría de las probabilidades geométricas, a saber: que la medida de un conjunto de posiciones K ha de ser independiente de la posición del conjunto en el plano. Si trasladamos todo el conjunto, en bloque, a otra posición diferente, la medida ha de tener el mismo valor. Además, la medida resulta así independiente del punto P escogido en K y de la dirección origen de los ángulos α. Con estas condiciones se demuestra que la medida anterior, volumen de los puntos K^*, es la única existente, salvo factor constante. Se denomina *medida cinemática* del plano. Veamos un ejemplo. Sea K_0 una figura convexa de área A_0 y perímetro L_0, y sea también K otra figura, también convexa, de área A y perímetro L (figura 8.1).

La medida de los conjuntos de posiciones de K en las que K tiene algún punto en común con K_0 (es decir, en los que K es interior a K_0, o bien corta al contorno de K_0, o bien contiene totalmente a K_0 en su interior) vale

$$2\pi(A + A_0) + LL_0 \qquad [5]$$

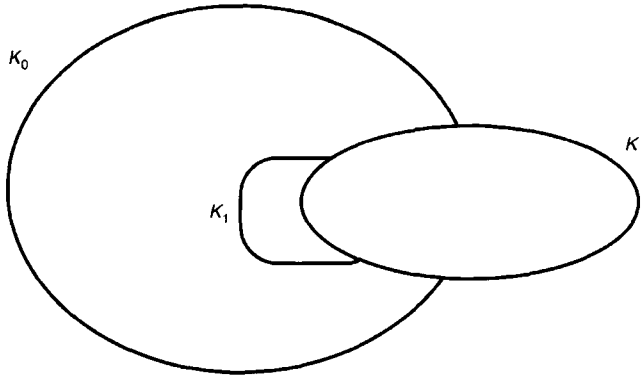


FIGURA 8.1

Si dentro de K_0 hay otra figura convexa K_1 de área A_1 y perímetro L_1, la medida de las posiciones de K en las que K tiene punto en común con K_1 valdrá, análogamente, $2\pi(A + A_1) + LL_1$, y por tanto se puede enunciar: dada una figura convexa K_1 interior a otra figura K_0, la probabilidad de que una tercera figura convexa K, que se sabe que corta a K_0 corte también a K_1, vale

$$p = \frac{2\pi(A + A_1) + LL_1}{2\pi(A + A_0) + LL_0} \qquad [6]$$

Esta fórmula es susceptible de comprobación experimental. Supongamos que tenemos dibujadas en el plano las figuras K_0 y K_1, la segunda contenida en la primera. Lanzamos sobre el plano una lámina que tenga la forma de K un gran número N de veces y contamos el número n de veces en las que K no sólo corta a K_0, sino también a K_1. Si al hacer la experiencia, en algún caso K no corta a K_0, este hecho no se tiene en cuenta. El cociente n/N tenderá entonces (en probabilidad), para valores mayores que N, al valor dado por la anterior probabilidad. Por ejemplo, supongamos que K_0 es un cuadrado de lado a; K_1 un círculo de radio r y K otro cuadrado de lado b (figura 8.2). En este caso, $A_0 = a^2$, $L_0 = 4a$, $A_1 = \pi r^2$, $L_1 = 2\pi r$, $A = b^2$, $L = 4b$, y, por tanto, el cociente n/N ha de tener el valor

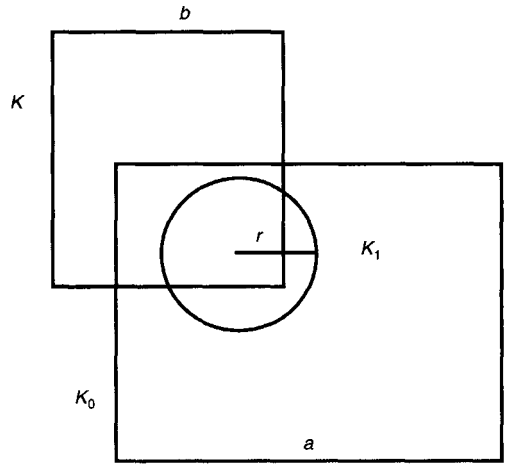


FIGURA 8.2

$$\frac{2\pi(\pi r^2 + b^2) + 8\pi rb}{2\pi(a^2 + b^2) + 16ab} \qquad [7]$$

En todo lo anterior, cuando decimos *figura convexa*, nos referimos a un conjunto convexo formado por los puntos interiores de una curva convexa más los puntos de la curva misma.

Consideremos otro ejemplo. Si la figura móvil K es un círculo de radio r y K_0 una figura convexa cualquiera (conjunto convexo de puntos, contorno incluido), podemos tomar el centro del círculo como el punto P unido a K. Entonces, para cada posición de K que tenga punto en común con K_0, el ángulo α puede variar entre 0 y 2π. Por tanto, resulta que el área cubierta por los puntos del plano cuya distancia a una figura convexa K_0 es igual o menor que r será la medida [5] dividida por 2π, es decir:

$$A(K_0) + rL(K_0) + \pi r^2 \qquad [8]$$

que es la llamada *fórmula de Steiner* para el plano, la cual da el valor del área del conjunto paralelo a otro a distancia r. En la figura 8.3 se pueden ver algunos ejemplos de conjuntos paralelos.

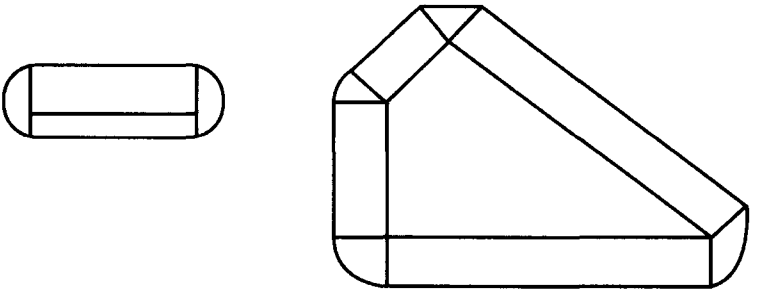


FIGURA 8.3

En el caso del espacio se plantea el problema análogo de definir una medida para conjuntos de figuras congruentes, o bien, equivalentemente, para conjuntos de posiciones de una misma figura K, móvil indeformable en el espacio. Para fijar la posición de K hay que dar la posición de cada uno de los puntos P a partir de sus coordenadas x, y y z, más una dirección por este punto, a partir de sus dos coordenadas esféricas, más una rotación alrededor de esta dirección. Por tanto, el conjunto de posiciones de K se puede representar por un conjunto de puntos de un espacio de seis dimensiones, y el volumen de este conjunto (definido adecuadamente por la condición de ser invariante por movimientos) es la llamada *medida cinemática* para los conjuntos de posiciones de una figura K móvil en el espacio, o para un conjunto de figuras congruentes con K. Aunque los cálculos no son inmediatos, se puede calcular que si K es un cuerpo convexo de características V (volumen), A (área) y M (curvatura media), la medida de las posiciones de K en las que K tiene punto en común con un cuerpo convexo fijo K_0 de características V_0, A_0, M_0 vale

$$8\pi^2 + (V + V_0) + 2\pi(MA_0 + M_0A) \qquad [9]$$

Podemos dar algunos ejemplos de esto:

1. Si K_1 es otro cuerpo convexo de características V_1, A_1, M_1 contenido en K_0, entonces la probabilidad de que dado al azar un

cierto K que tenga punto en común con K_0 también lo tenga con K_1 vale

$$\frac{8\pi^2(V + V_1) + 2\pi(MA_1 + M_1A)}{8\pi^2(V + V_0) + 2\pi(MA_0 + M_0A)} \qquad [10]$$

2. Si K es una esfera de radio r y tomamos su centro (un cierto punto P), entonces la medida del conjunto de posiciones de K en las que K tiene algún punto en común con K_0, está determinada por [9], y, dividiendo por $8\pi^2$ (que es la medida de las rotaciones del espacio alrededor de P), resulta que el volumen del conjunto de puntos paralelo y exterior de un cuerpo convexo K_0 a distancia r, vale (fórmula de Steiner para el espacio):

$$V_0 + A_0r^2 + M_0r + (4/3\pi r^3) \qquad [11]$$

(donde $V = (4/3)\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$ y $M = 4\pi r$).

3. Si K es un segmento de longitud h, entonces $V = 0$, $A = 0$, $M = \pi h$ y, por tanto, la medida de los segmentos orientados de longitud h que tienen punto en común con un cuerpo convexo K_0 vale $4\pi V_0 + \pi hA_0$. Así, si un segmento de longitud h dado al azar en el espacio, se sabe que corta a un cuerpo convexo K_0, la probabilidad de que también corte a un cuerpo convexo K_1, contenido en K_0, vale $(4V_1 + hA_1) / (4V_0 + hA_0)$. Para más detalles sobre estas cuestiones y otras similares se puede consultar nuestro libro, ya citado, *Integral Geometry and Geometric Probability* (1976).

A partir de los casos del plano y del espacio, que ya hemos considerado, la geometría integral se ha desarrollado en dos direcciones diferentes. La primera consiste en aumentar el número de dimensiones del espacio en el que se hallan las figuras, con lo cual aparece una gran variedad de posibilidades, más difíciles de tratar por la técnica del cálculo implicado que por su concepción. La segunda consiste en definir medidas que no sean invariantes respecto al grupo de los movimientos, sino respecto a otros grupos más generales, como el afín, el proyectivo, el simpléctico, etc.

Al aumentar las dimensiones de las variedades en juego, se han hallado interesantes relaciones entre las medidas de los subespacios lineales que cortan a una variedad fija con otros invariantes geométricos de ésta, ya conocidos por otros caminos. Por ejemplo, si una variedad es un cuerpo convexo fijo en el espacio de n dimensiones, la medida de los subespacios lineales de dimensión h que lo cortan ha resultado que coincide con lo que Minkowski llamó, a principios de siglo, *quermassintegrale,* y que juega un papel fundamental en la teoría de cuerpos convexos. Para variedades no convexas, las mismas medidas y los valores medios calculados con ellas coinciden con las curvaturas que Hermann Weyl introdujo en 1939 en un trabajo muy importante («On the Volume of Tubes», *American Journal of Mathematics,* vol. 61, 1939, 461-472).

Al pasar a espacios y variedades de más dimensiones, la medida cinemática ha dado lugar a una gran variedad de *fórmulas cinemáticas.* La fórmula cinemática más general, que las contiene a casi todas como casos particulares, es la que obtuvieron Federer en 1959 y Chern en 1966. Se la suele llamar *fórmula de Chern-Federer* y, esencialmente, consiste en calcular el valor medio de las curvaturas de Weyl de la intersección de dos variedades, una fija y la otra móvil, para todas las posiciones de la móvil. Si las variedades dadas son lo bastante regulares, la demostración no es muy difícil, pero se va complicando a medida que se quiere prescindir de condiciones de regularidad. Entre los trabajos recientes, se pueden consultar algunos de Zahle y de Fu.

Recientemente, la geometría integral ha sido aplicada a la interpretación automática de imágenes tridimensionales; es decir, a poner de manifiesto con la máxima claridad posible y de manera automática, sobre todo para usos médicos, los detalles que se desea destacar de las imágenes obtenidas por tomografía con rayos X, por resonancia magnética, o por ecografías (imágenes ultrasonoras). De manera general, la reconstrucción de imágenes aparece en muchas ramas de la técnica y con frecuencia hace uso de los resultados y los métodos tanto de la geometría integral como de la geometría fractal. Se pueden hallar comentarios interesantes y bibliografía al respecto en el artículo de N. Ayache y J. D. Boissonat en el *Butlletin de Liason* del INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, n.º 132, París, 1991, pp. 2-11).

Hay que mencionar, también, los trabajos del matemático ruso R. V. Ambartzumian y de su escuela, contenidos en los libros de este autor: *Combinatorial Integral Geometry* (Wiley, 1982) y *Factorization Calculus and Geometric Probability* (Cambridge University Press, 1990). La geometría integral combinatoria puede ser considerada como una generalización del problema primitivo de la aguja de Buffon, extendiéndolo al caso de varias agujas fijas en el plano, en posición arbitraria, y calculando las medidas de las rectas que cortan o separan a algunas de estas agujas. Esto conduce a la definición de otras medidas no invariantes que también presentan propiedades interesantes.

En el segundo de los textos mencionados de Ambartzumian se utiliza mucho la factorización de medidas, que consiste en expresar las medidas de los espacios producto en términos de las medidas de los espacios factores. Este procedimiento, cuando está fundamentado con rigor, simplifica notablemente la obtención de fórmulas integrales. En un principio, estas fórmulas se obtenían a partir de cambios de variables utilizando los jacobianos; después, en la escuela de Blaschke, con el uso del cálculo diferencial exterior y ahora, con Ambartzumian, en muchos casos se pueden alcanzar los mismos resultados con una mayor simplicidad.

3. Geometría estocástica

En la década de los sesenta, la geometría integral volvió a interesar a los probabilistas, debido principalmente a una serie de importantes trabajos de R. E. Miles. Se volvió a las probabilidades geométricas, pero no en su sentido clásico, sino en el marco de los modernos desarrollos de la teoría de las probabilidades, sobre todo dentro de los procesos estocásticos. Se conocían los procesos de puntos —los procesos de Poisson, por ejemplo— y se trató de extender el concepto a procesos de rectas y a otros elementos geométricos. De esta forma nació la geometría estocástica, cuyas ideas y resultados básicos se pueden encontrar en D. Stoyan, D. G. Kendall y J. Mecke, *Stochastic Geometry and its Applications* (Akademie Verlag, Berlín, 1987).

El hecho más notable es que los problemas originados por

los procesos de elementos geométricos, combinados con cuestiones probabilísticas, tienen un claro significado geométrico. Veamos el ejemplo original. Consideremos un proceso aleatorio de rectas en el plano, definido por ciertas condiciones. El plano queda dividido en polígonos convexos, formando lo que se denomina un *mosaico aleatorio*. La figura 8.4 representa uno de ellos.

Si el proceso depende de un cierto número de parámetros, se presenta el problema de hallar los valores medios (o esperanzas matemáticas) y, en general, los momentos de cualquier orden, de algunas características de los polígonos (área A, perímetro L, número de lados N, radio r del círculo inscrito, etc.) a partir de los parámetros del proceso. El caso más simple es el de un proceso de Poisson de intensidad λ (es decir, un proceso de Poisson de puntos de intensidad λ en la franja $0 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, donde p y α son las coordenadas de las rectas que ya vimos antes y que intervienen para dar las rectas al azar). Entonces se obtiene, pongamos por caso, que los valores medios (o esperanzas matemáticas) de A, L y N son los expresados respectivamente en las siguientes ecuaciones: $E(A) = 4/\pi\lambda^2$, $E(L) = 4/\lambda$, $E(N) = 4$.

De manera más general, un mosaico aleatorio se define como una aplicación cuyo dominio es el espacio de muestras de un espacio de probabilidad, cuya imagen, para todo elemento de este espa-

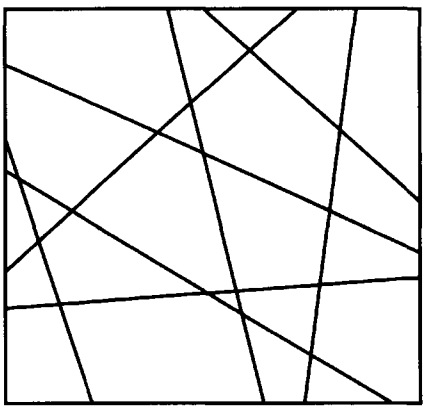
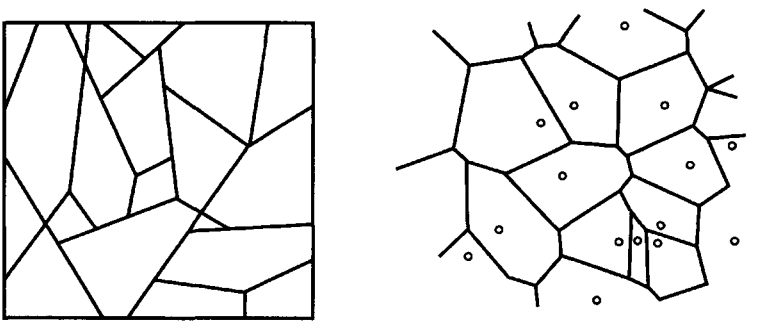


FIGURA 8.4

cio, es una partición del plano en polígonos convexos. Las figuras 8.5 y 8.6 son ejemplos de mosaicos aleatorios.

La figura 8.6 representa un *mosaico de Voronoi*, que se obtiene tomando un proceso de puntos de Poisson y asignando luego a cada punto todos los puntos del plano que distan menos del mismo que de cualquier otro punto del proceso. Si el proceso original de Poisson es de intensidad λ, las características principales del mosaico de Voronoi correspondiente son $E(A) = 1/\lambda$, $E(L) = 4/\sqrt{\lambda}$, $E(N) = 6$. En lugar de partir de un proceso de Poisson se puede empezar con un conjunto discreto de puntos arbitrarios, de manera que los puntos que distan menos de cada uno de ellos que de los otros también forman un mosaico de Voronoi, aunque ya no es aleatorio. Por ejemplo, si en el plano de una ciudad están señaladas todas las escuelas, las zonas que corresponden a cada una de ellas (por ser los puntos más cercanos) dividen el plano según un mosaico de Voronoi.

Los mosaicos aleatorios se pueden considerar como una generalización de los mosaicos clásicos formados por la división del plano en polígonos o regiones congruentes entre sí, que se pueden sobreponer por un cierto grupo de movimientos del plano que transforma el mosaico en sí mismo. Estos mosaicos clásicos han sido muy estudiados, y ha resultado que hay 17 grupos diferentes de transformaciones del plano que generan mosaicos no equivalentes. Son los llamados *grupos cristalográficos*, que fueron descubiertos por Fedorov en 1891 y, otra vez, por Polya, en 1924. Coloreando con-



FIGURAS 8.5 y 8.6

venientemente estas divisiones del plano, se construyen los mosaicos que desde la Antigüedad se han usado como adorno del suelo y las paredes de los edificios. Son clásicos los mosaicos de la Alhambra de Granada, entre los cuales, curiosamente, se han hallado representaciones de los diecisiete mosaicos posibles. Como ya hemos observado en otro capítulo de este libro, esto constituye un ejemplo de los vínculos entre el arte y la matemática.

La geometría estocástica trata, preferentemente, los mosaicos aleatorios, es decir, mosaicos en cuya construcción interviene de alguna manera el azar. También estudia los mosaicos mixtos, obtenidos por superposición de un mosaico de rectas dadas por un proceso de Poisson y un mosaico formado por hexágonos regulares. Sobre mosaicos aleatorios y mosaicos mixtos se puede consultar nuestro trabajo «Mosaicos Aleatorios» (*Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*, vol. 82, 1988, 483-522).

4. Teoría de la forma

Un problema clásico de la teoría de las probabilidades geométricas es el de averiguar la probabilidad de que un triángulo definido por tres puntos al azar (con ley uniforme) dentro de un dominio determinado sea acutángulo. Otro problema afín es el de hallar la probabilidad de que un triángulo como el mencionado tenga un ángulo comprendido, pongamos por caso, entre 175° y 180°, es decir, que sea marcadamente obtusángulo.

A veces, en un plano hay un número relativamente grande de puntos y entre ellos se observan conjuntos de más de dos que están prácticamente alineados. Ante esta situación, nos podemos preguntar si ha habido algún motivo para que se hayan dado estas alineaciones, o bien se deben más bien al azar. Este tipo de problemas ha dado origen a la llamada *teoría de la forma*, sobre la que existen diversos trabajos de D. G. Kendall (entre otros: «Shape Manifolds, Procrustean Metrics and Complex Projective Spaces», *Butlletin of London Mathematical Society,* 16, 1984, 81-121), que también forman parte de la geometría estocástica.

El caso más simple y estudiado es el de considerar h puntos en

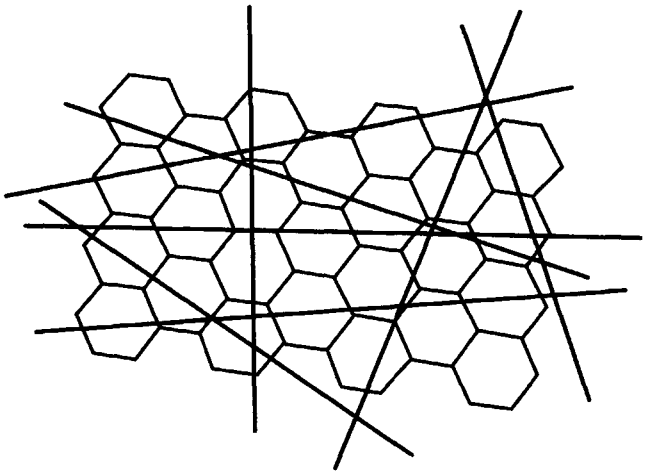


FIGURA 8.7

el plano, $A_1, A_2, \ldots, A_h$, y definir un espacio de la forma, es decir, un espacio en el que cada punto represente un conjunto de h puntos del plano, con la condición de que a cada dos conjuntos que difieran en una semejanza (esto es, que constituyan conjuntos de la misma forma, aunque puedan tener tamaño y posiciones diferentes en el plano) les corresponda el mismo punto del espacio. Después hay que dar una métrica en este espacio y con esto ya se pueden calcular medidas de conjuntos y, por tanto, probabilidades.

El método se ha aplicado a la geología para ver si en la distribución de yacimientos de ciertos minerales algunas alineaciones observadas pueden considerarse como debidas al azar o no. También se ha aplicado el método para decidir si dentro de un cierto gran número de puntos observados (por ejemplo, ciertas plantas o matas), las tendencias a distribuirse circularmente pueden o no atribuirse al azar. También se ha empleado el método (pero considerando esta vez circunferencias en lugar de rectas) para ver si en la distribución de un cierto número de menhires (monumentos conmemorativos) en una determinada región hay o no tendencia a alineaciones o a distribuciones circulares. En este caso, se observa el número de ternas que forman triángulos con ángulos próximos a

180°, o bien el número de cuaternas uno de cuyos puntos diste muy poco de la circunferencia determinada por los otros tres, calculando en cada caso si hay una mayor o menor coincidencia con el número de casos que se obtienen al suponer los puntos distribuidos al azar (según una cierta ley de probabilidad).

CAPÍTULO 9

ESTEREOLOGÍA. TOMOGRAFÍA COMPUTADA

1. La estereología

Las geometrías integral y estocástica encuentran aplicaciones importantes y naturales en la llamada *estereología*, una rama interdisciplinaria muy interesante de la matemática, cuyas técnicas sirven a una gran variedad de disciplinas, muchas de ellas en apariencia alejadas entre sí, como la biología, la mineralogía y la metalurgia. Algunas fórmulas estereológicas datan del siglo pasado y aparecen en trabajos sobre la composición de rocas o minerales. A pesar de ello, hace menos de tres décadas se vio cómo muchos resultados aislados e inconexos podían sistematizarse y perfeccionarse si se trataban dentro del marco de la geometría integral. La historia es la siguiente.

Durante el Congreso Internacional de Anatomía celebrado en Nueva York en 1960, algunos participantes observaron que varios de los problemas presentados consistían, esencialmente, en la determinación de estructuras tridimensionales a partir de otras estructuras bidimensionales obtenidas por proyección o sección de las primeras. Se observó que el problema se presentaba por igual en metalurgia y en mineralogía al querer descubrir la composición de aleaciones, rocas o minerales, a partir de secciones planas, o en botánica, en el estudio de los tejidos de las maderas, también a partir de cortes planos, o en la distribución de cultivos en áreas grandes, a partir de secciones longitudinales. Se organizó una reunión para tratar el tema en el que concurrieron especialistas de distintas áreas. Este encuentro tuvo lugar en las Sierras de Feldberg, en la Selva Negra de Alemania, los días 11 y 12 de mayo de 1961. En esta reu-

nión, se bautizó el campo con el nombre de *estereología* y se constituyó la Sociedad Internacional de Estereología. Su primer presidente fue Hans Elias (1907-1985), de la Universidad de Chicago, quien enunció la siguiente definición: «Estereología es un conjunto de métodos para la exploración del espacio tridimensional a partir del conocimiento de secciones bidimensionales o proyecciones sobre planos. Es decir, se trata de una extrapolación del plano al espacio.»

A partir de aquella fecha se organizó un Congreso Internacional de Estereología cada cuatro años, el primero en Viena, en 1963. En las Actas de estos Congresos se puede reseguir la evolución de esta disciplina y los trabajos fundamentales que le han dado cuerpo. Posteriormente, a través de un convenio con el *Journal of Microscopy,* se decidió que esta importante revista fuera también el órgano de la Sociedad Internacional de Estereología, de modo que en el *Journal* se han ido publicando muchos de los trabajos realizados en el mundo sobre esta disciplina. E. R. Weibel y L. M. Cruz Orive escribieron unas notas históricas muy interesantes sobre estos hechos en *Acta Stereologica* (vol. 6, 1987), con motivo del 25 aniversario de la fundación de la Sociedad.

Estimación de volúmenes

Sea X un cuerpo en el espacio que contiene en su interior distintos materiales —que representaremos siempre por Y— distribuidos aleatoriamente, y de formas y medidas diferentes. Estos materiales pueden constituir, pongamos por caso, partículas de formas diferentes, hilos o filamentos en los que predomina una dimensión sobre las otras, láminas o superficies, o bien franjas irregulares de estructura topológica variable. El primer caso que consideraremos es aquel en el que Y está compuesto por dominios tridimensionales, con un volumen total $V(Y)$. Si $V(X)$ representa el volumen total del cuerpo X, se trata de estimar la proporción $V(Y)/V(X)$, es decir, el volumen de Y por unidad de volumen de X.

Se supone que se puede cortar X por un plano, y a partir del conocimiento de la proporción de Y y de X en la sección plana obtenida, se puede estimar $V(Y)/V(X)$ (véase la figura 9.1).

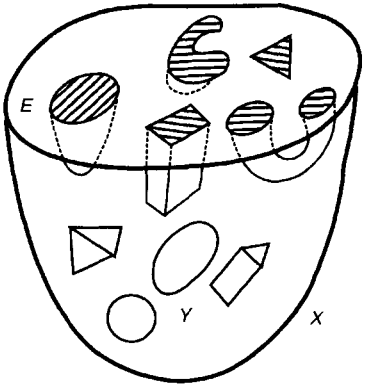


FIGURA 9.1

El plano por el que se corta es un plano dado al azar, pero como parece natural escogerlo de manera que su sección con X sea la más grande posible, podemos suponer que la probabilidad de una sección determinada es proporcional a su área. Con esta hipótesis se puede demostrar que la esperanza matemática del cociente del área $a(Y)$ de la sección plana con Y y del área $a(X)$ de la sección del plano con X viene determinada por la ecuación $E(a(Y)/a(X)) = V(Y)/V(X)$. Esta relación nos dice que se puede tomar como estimador de la proporción $V(Y)/V(X)$ el cociente $a(Y)/a(X)$, el cual se puede medir directamente en la sección plana obtenida. Si designamos simbólicamente con 'V_V' la razón de los volúmenes, y 'a_a' la razón de las áreas en la sección plana, el resultado anterior se simboliza como sigue:

$$V_V = a_a$$

Éste es, probablemente, el primer resultado estereológico, obtenido ya por A. Delesse, en 1848, para determinar la composición de ciertas rocas a partir de la observación de secciones planas.

Otra manera de estimar la razón de los volúmenes consiste en cortar el cuerpo X por una recta y comparar las longitudes de sus intersecciones con Y y X respectivamente. Si $h(Y)$ y $h(X)$ son ahora las longitudes de estas intersecciones, y si consideramos que se

tomarán siempre las secciones por rectas que corten a X según las mayores cuerdas posibles, resulta que el valor medio (o esperanza matemática) del cociente $h(Y)/h(X)$ vale también $V(Y)/V(X)$, y, por tanto, $h(Y)/h(X)$ es otro estimador del cociente de volúmenes $V(Y)/V(X)$. En símbolos, esto se expresa

$$V_V = h_h$$

y es otro resultado clásico de la estereología, ya conocido por Rosiwal en 1898.

ESTIMACIÓN DE ÁREAS

Supongamos que el cuerpo X (ahora convexo) contiene en su interior superficies con un área total $A(Y)$. Queremos estimar el cociente $A(Y)/V(X)$, es decir, la cantidad de área por unidad de volumen. Podemos cortar por planos o por rectas. Si cortamos por un plano al azar y $L^*(Y)$ es la longitud total de la intersección del plano con las superficies Y, se obtiene que $E(L^*(Y)/a(X)) = (\pi/4)/A(Y)/V(X)$; es decir, $A(Y)/V(X)$, la cantidad de área de Y por unidad de volumen de X se puede estimar por el producto por $4/\pi$ de la proporción de la longitud de las curvas de intersección del plano secante por el área de la intersección de este plano con X. En símbolos, este hecho se expresa:

$$A_V = (4/\pi)L_a^*$$

También se puede estimar $A(Y)/V(X)$ cortando por una recta y comparando el número de sus puntos de intersección con las superficies Y con la longitud de la cuerda que determina X. Si $n(Y)$ es el número de puntos de intersección de la recta dada al azar con Y y $h(X)$ es la longitud de la cuerda intersección de la recta con X, resulta que la esperanza matemática del cociente $n(Y)/h(X)$ es igual a $(1/2)(A_V/V_X)$, que se suele escribir en símbolos de la siguiente manera

$$A_V = 2P_L,$$

indicando con 'P_L' —como es habitual en estereología— el número de puntos de intersección de la recta dada con Y por unidad de longitud de la cuerda correspondiente, resultante de la intersección de la recta con X (figura 9.2). Si Y está constituido por cuerpos convexos y N_L es el número de los mismos que son cortados por la recta al azar, por unidad de longitud de cuerda, entonces $N_L = P_L/2$, y, por tanto, tenemos también que $A_V = 4N_L$.

Estimación de longitudes

Supongamos ahora que en el interior del cuerpo convexo X hay fibras o hilos Y que tienen una longitud total $L(Y)$. Se trata de estimar la longitud de estos hilos por unidad de volumen de X, es decir, $L(Y)/V(X)$. Se puede cortar por un plano y contar el número de sus puntos de intersección $N(Y)$ con los hilos Y (figura 9.3) Si, como antes, $a(X)$ indica el área de la sección del plano con X, se puede demostrar que $E(N(Y)/a(X)) = (1/2)(L(Y)/V(X))$.

Por tanto, $2(N(Y)/a(X))$ es un estimador de $L(Y)/V(X)$, valor que contamos directamente en la sección del plano con X. Como $N(Y)/a(X)$ es el número de puntos de intersección de curvas Y con el plano por el que se corta, por unidad de área de su sección con X, se suele escribir:

$$L_V = 2P_a$$

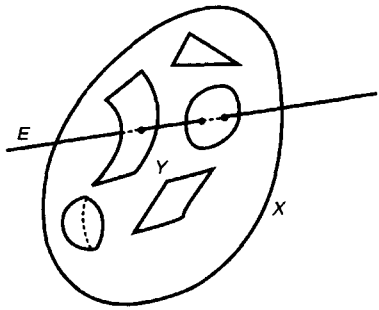


Figura 9.2

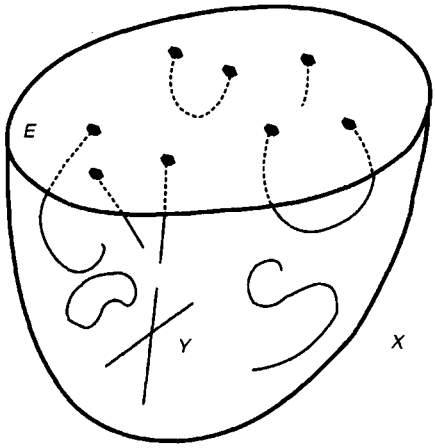


FIGURA 9.3

ESTIMACIÓN DEL NÚMERO DE PARTÍCULAS CONVEXAS

Supongamos que el cuerpo convexo X contiene en su interior partículas congruentes entre sí, cuyo conjunto total representaremos por Y. Para estimar el número de partículas por unidad de volumen de X, se puede estimar el volumen $V(Y)$ o el área $A(Y)$, y después dividir por el volumen o el área de cada partícula. Si las partículas son convexas y congruentes, y conocemos su curvatura media M_0, entonces, si designamos con $N(Y)$ el número de las partículas que son cortadas por un plano al azar, y con $a(X)$ el área de la intersección del mismo plano con X, se puede demostrar que $E(N(Y)/a(X)) = N(X)M_0/2\pi V(X)$, donde $N(X)$ es el número de partículas contenidas en X. Puesto que $N(Y)/a(X)$ es el número de partículas cortadas por el plano por unidad de área de la sección del plano con X (que representaremos con N_a), y $N(X)/V(X)$ es el número de partículas por unidad de volumen de X (que representaremos con N_V) tenemos que

$$N_V = 2\pi N_a/M_0, \qquad \text{y también que} \qquad N_V = (4/\pi)L_a^*/A_0$$

(donde A_0 es el área de cada partícula y L_a^* es la longitud de las cur-

vas de intersección del plano con las partículas, por unidad de área de la sección).

Si los corpúsculos o partículas se reducen a segmentos de longitud u_0, sabemos que su curvatura media es $M_0 = \pi u_0$ y, por tanto, para estimar el número de segmentos N_V por unidad de volumen de X, tenemos que $N_V = 2N_a/u_0$. Si las partículas son esferas de radio r, $M_0 = 4\pi r$ y, por tanto, $N_V = N_a/2r$. Si son cubos de arista b, $M_0 = 3\pi b$ y, por tanto, $N_V = (2/3b)N_a$.

Si en lugar de considerar secciones planas de X se consideran secciones por rectas, resulta que $N_V = 4N_h/A_0$, donde A_0 es el área de cada partícula y N_h el número de ellas cortadas por la recta, por unidad de longitud de la cuerda intersección de la recta con X. Si las partículas son esferas de radio r, $N_V = N_h/\pi r^2$, y si son cubos de arista b, $N_V = (2/3b^2)N_h$.

En las fórmulas anteriores, si las partículas no son congruentes hay que sustituir M_0 o A_0 por los valores medios de estas cantidades para cada una de las formas y medidas diferentes de las partículas.

Estimación de la curvatura media

La curvatura media, para cuerpos convexos, vale $2\pi D$, donde D es la anchura media del cuerpo. Si se trata de superficies abiertas (con contorno), o bien de superficies cerradas pero no convexas, hay que definir la curvatura media como la integral de la media aritmética de las curvaturas principales de la superficie en cada punto. Esta última definición permite considerar la curvatura media de Y por unidad de volumen de X, incluso en el caso en que Y sea un conjunto de superficies, sean o no cerradas, sean o no convexas.

Supongamos que Y es un conjunto de superficies cerradas, no necesariamente convexas. La sección por un plano será un conjunto de curvas cerradas planas. La curvatura total de estas curvas es la suma de los ángulos que las tangentes de cada curva giran al recorrer la curva. Si la curva está hecha de un solo trozo, la curvatura total vale 2π, y si está compuesta de N trozos, vale $2\pi N$. Por tanto, la curvatura total c de las curvas de intersección de Y con el plano al azar se computa directamente sobre esta sección. Entonces, si $a(X)$ es el área de la sección plana del plano con todo

el cuerpo X, se verifica que $E(c/a(X)) = M(Y)/V(X)$; es decir, $E(N/a(X)) = M(Y)/2\pi V(X)$, fórmulas que permiten estimar la curvatura media de las superficies Y por unidad de volumen de X. Como la curvatura media de las láminas planas de perímetro u_0 es igual a πu_0, estas fórmulas permiten estimar la longitud del borde de las partículas por unidad de volumen de X.

Estimación de formas

La forma de las partículas o corpúsculos contenidos en un cuerpo X no viene determinada por ninguna de las características V_0, A_0 y M_0 que ya hemos visto cómo se pueden estimar. La fórmula exacta no se puede expresar en general por medio de un número finito de parámetros, pero se han estudiado algunas combinaciones de V_0, A_0, M_0 que en cierta medida indican si la partícula es más o menos redonda, o si tiene una forma más bien lineal, o más o menos plana. Estas combinaciones son, por ejemplo, M_0^2/A_0, M_0A_0/V_0, o M_0V_0/A_0^2, todas las cuales son invariantes por semejanzas. Uno de los cocientes más utilizados es $H_0 = M_0V_0/A_0^2$, y se puede estimar a partir de los estimadores que hemos considerado antes.

La estereología utiliza otros muchos parámetros para informar sobre la distribución de partículas dentro de un cuerpo opaco. Por ejemplo, si al cortar por una recta designamos con w la distancia media entre partículas, es decir, el recorrido libre medio entre éstas, se puede estimar que $w = (1 - V_V)/N(X)$, donde $N(X)$ es el número de partículas a las que la recta corta.

Todos estos y muchos otros resultados clásicos de la estereología se pueden ver demostrados y ejemplificados en la obra inicial de E. E. Underwood, *Quantitative Sociology* (Addison-Wesley, 1970). Sobre los progresos de la estereología y su estado actual, se pueden hallar trabajos más recientes, y muy importantes, en los volúmenes del *Journal of Microscopy,* sobre todo en las contribuciones de L. M. Cruz Orive y H. J. G. Gundersen. Estos trabajos son de gran interés teórico y práctico, por sus ideas nuevas y sus aplicaciones concretas.

2. La tomografía computada por rayos X

Un problema que al principio no era más que una mera curiosidad matemática, pero que después devino fundamental para el desarrollo de una rama muy importante de la geometría integral y de la tecnología, fue tratado por el alemán J. Radon (1887-1956), en 1917. En su forma más simplificada, el problema se puede enunciar de la siguiente manera. Sea, en el plano, un conjunto convexo K que contiene en su interior a otro conjunto convexo K_1. Consideremos todas las rectas del plano que cortan a K. Algunas no cortarán a K_1, mientras que otras lo cortarán según una cierta cuerda de longitud variable a. Supongamos que conocemos a para todas las rectas que cortan a K. ¿Podremos a partir de esto conocer la forma y la posición de K_1? Radon demuestra que es posible y, además, que el método sirve para el caso en que K_1 sea un conjunto de puntos cualquiera contenido en K, independientemente de su forma y de su medida. Es decir, se puede reconstruir todo lo que hay en el interior de K a partir del conocimiento de lo que sucede en cada recta al atravesar K.

Más tarde, en 1963, el físico norteamericano A. M. Cormack interpretó el problema de Radon suponiendo que las rectas del plano eran rayos X que atravesaban K. Si se medía la intensidad de estos rayos a la entrada y a la salida de K, se podían conocer en cierta manera las impurezas o los obstáculos que habían hallado a lo largo de su camino. Midiendo esta pérdida de intensidad (o de energía) para cada una de las rectas, las fórmulas obtenidas por Radon (llamadas *transformadas de Radon*) permitían conocer con exactitud el interior de K. En la práctica, no se puede cortar por todas las rectas, pero si se realiza la operación un número suficientemente grande de veces con direcciones y posiciones diferentes, se puede reconstruir el interior de K con bastante aproximación.

Si en lugar de figuras planas se trata de un cuerpo en el espacio (una cabeza, por ejemplo, o cualquier otra parte del cuerpo humano) se pueden reconstruir de esta manera las distintas secciones planas espaciales en intervalos adecuados, y se puede deducir de las mismas toda la estructura interior.

La idea es muy simple y los resultados de Radon permiten asegurar que el problema es tratable teóricamente. Para su utilización

práctica, la idea de Cormack tuvo que ser complementada con la solución de muchos problemas matemáticos y tecnológicos. Se tuvo que estudiar el número de rayos necesarios y su distribución más adecuada para obtener una aproximación satisfactoria. Por otro lado, hay que combinar el número de rayos y sus direcciones utilizadas con la facilidad en la técnica de producir la imagen en un tiempo mínimo. Ésta es la razón de que se hayan estudiado y de que se continúen estudiando algoritmos o métodos matemáticos nuevos para conseguir la máxima precisión en el mínimo tiempo.

Los primeros dispositivos consistían en tomar rayos paralelos en diferentes direcciones separadas en el espacio (de grado en grado, por ejemplo). Si tomamos 180 direcciones y 160 rayos paralelos para cada una de las direcciones, tendremos, para cada sección plana, 28.800 rectas o rayos que la atraviesan, un número lo bastante grande como para conseguir una exactitud muy buena. En los aparatos más modernos, los rayos no son paralelos sino que están dispuestos en forma de abanico, a partir de una sucesión de focos que emiten unos 1.000 rayos cada uno. Midiendo la pérdida de intensidad de cada rayo, las fórmulas de Radon, adaptadas convenientemente a este caso finito, permiten reconstruir el interior de la sección plana. Después de operar con varias secciones (con un total de unos 300.000 rayos lineales que atraviesan el cuerpo) se pueden unificar los resultados obtenidos en cada una de ellas y, mediante una computadora adecuada, reconstruir todo el cuerpo.

Llevar a la práctica estos resultados exige, por supuesto, poner en juego los más recientes avances de la electrónica y la computación. Hacen falta, además, detectores ultrasensibles para medir la pérdida de intensidad de los rayos al atravesar el cuerpo, y también un mecanismo computacional sofisticado que permita, primero, almacenar toda la información recibida y, después, procesarla. La imagen se registra en una película que puede ser observada directamente, y que puede ser repetida tantas veces como su estudio requiera.

El primer aparato de este tipo fue patentado por el inglés G. N. Hounsfield en 1972. Desde entonces, los progresos han sido enormes. En la actualidad, la operación se realiza en segundos y la precisión permite detectar perturbaciones insignificantes. La precisión es necesaria, porque la densidad de los tejidos del cerebro, por ejem-

plo, oscila entre 1,00 y 1,05, y a veces hay que detectar variaciones del orden de 0,005. Los problemas continúan siendo numerosos, pero los progresos y el éxito obtenidos hicieron que fuera concedido el Premio Nobel de Medicina de 1979 a sus iniciadores, al teórico A. M. Cormack y al práctico G. N. Hounsfield. Si Radon (el creador de la base matemática que permitió concebir la posibilidad de este dispositivo tan potente) hubiera vivido, seguro que habría compartido el galardón.

Todo lo anterior es la base de la Tomografía Computada por rayos X (palabra que deriva del griego *tomos*, que significa sección) porque se reconstruye el cuerpo entero a partir de secciones paralelas del cuerpo que se quiere examinar. Por lo que respecta a la literatura matemática sobre el tema se pueden consultar S. Helgason, *The Radon Transform* (Birkhauser, 1980); «Computed Tomography» (*Amer. Math. Society, Symposia in Applied Mathematics*, 27, 1980) y también «Integral Geometry and Tomography», *Contemporary Mathematics. Amer. Math. Society*, (1989), donde se mencionan aplicaciones interesantes de la tomografía en la matemática y en diferentes campos de la ciencia y la tecnología.

Obsérvese que tanto la estereología como la tomografía tratan de reconstruir el interior de un cuerpo opaco a partir de sus secciones. En estereología hay que cortar el cuerpo para obtener de él sus secciones y tomar directamente las medidas que interesan, para aplicar después las fórmulas adecuadas a las medidas tomadas. De modo que no es útil para aplicarla a los seres vivos. Sin embargo, en la tomografía el cuerpo a examen no se destruye (aparte del daño que puedan hacer la radiaciones si se aplican en exceso), y se obtiene sobre una pantalla de televisión todo el interior del cuerpo que se desea estudiar, con toda la precisión requerida para las necesidades prácticas. Es un ejemplo de cómo la precisión de las técnicas actuales exige de la matemática una elaboración de los cálculos precisa y cuidadosa y una gran exactitud en los resultados.

El llamado *problema de Pompeius* (1929) es del mismo estilo que el problema que originó la tomografía. De la misma manera que hemos visto la medida cinemática como generalización de la medida de puntos, rectas o planos, nos podemos preguntar ahora si los problemas de la estereología o de la tomografía computada se

podrían extender al caso en que el cuerpo fijo —cuyo interior queremos explorar— sea cortado por otro cuerpo, móvil, que puede ocupar todas las posiciones en las que tiene algún punto en común con el cuerpo fijo, en lugar de considerar secciones por rectas o por planos. El resultado depende, en gran medida, de la forma del cuerpo móvil y de si se consideran todos los movimientos o, dentro de éstos, sólo las traslaciones u otro subgrupo distinto. Se puede consultar el libro de C. Bernstein y L. Zalcman, «Pompeius Problem on Symmetric Spaces», *Comment. Math. Helvetici*, 55 (1980, 593-621) y la bibliografía allí citada.

APÉNDICE

Historia del número π

El número π, razón de la circunferencia al diámetro, es, seguramente, el número más importante de la matemática. Su conocimiento, que data de los primeros tiempos del saber matemático, fue mejorando con el tiempo. De hecho, se puede considerar la precisión acerca de su conocimiento como un índice del estado de la matemática en cada época.

He aquí una exposición cronológicamente ordenada de los valores que se han ido atribuyendo a este número con el paso del tiempo:

Siglo:

— XX (babilonios) = 25/8 = 3,125
— XX (egipcios) = $(16/9)^2$ = 3,160...
— XX (chinos) = 3
— VI (Biblia, Libro de los Reyes, 7, 23) = 3
— II, Arquímedes = 211875/67441 = 3,14163...
— II, Claudio Ptolomeo = 377/120 = 3,14166...
— II (chinos, hindúes) = $\sqrt{10}$ = 3,1672...
= 142/45 = 3,1555
= 157/50 = 3,14

Año:

— 1573, Valentin Otho = 355/113 = 3,1415929...
— 1687, Newton, calcula 16 decimales exactos
— 1706, J. Machin, por desarrollo en serie del arco tangente, calcula 100 decimales

— 1794, Vega, calcula 140 decimales
— 1855, Richter, calcula 500 decimales
— 1873, William Shanks, calcula 707 decimales.

Este número se mantiene hasta la aparición de las computadoras electrónicas. A partir de ese momento, el número de las cifras decimales que se calculan crece rápidamente:

— 1949, se conocen 2.037 decimales
— 1954, se conocen 3.189 decimales
— 1959, se conocen 16.167 decimales
— 1961, se conocen 100.000 decimales
— 1966, se conocen 250.000 decimales
— 1967, se conocen 500.000 decimales
— 1989, se conocen mil millones de cifras decimales.

A partir de estos mil millones de cifras decimales se comprueba que, hasta ellas, el número π es normal, es decir, que todas las cifras aparecen en él con la misma frecuencia, e, incluso, absolutamente normal, o sea, que cualquier grupo de cifras aparece en su desarrollo (grupos de número no excesivamente grande, no obstante). Este hecho experimental confirmaría que se trata de un número normal, e incluso absolutamente normal, en el sentido de Borel. Aunque se sabe que es casi seguro de que es así (probabilidad 1), el hecho todavía no ha sido demostrado.

En 1882, Lindemann demostró que π es un número trascendente, es decir, que no puede ser raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros.

LIBROS PUBLICADOS DE LLUÍS A. SANTALÓ*

Historia de la aeronáutica, Espasa Calpe Argentina, Buenos Aires, 1946.

Geometría Integral (en colaboración con J. Rey Pastor), Espasa Calpe Argentina, Buenos Aires, 1951.

Introduction to Integral Geometry, Hermann, París, 1953. (Traducido al ruso.)

La probabilidad y sus aplicaciones, Iberoamericana, Buenos Aires, 1955.

Geometría Analítica (en colaboración con J. Rey Pastor y Balanzat), Kapelusz, Buenos Aires, 1955.

Vectores y tensores, EUDEBA, Buenos Aires, 1961.

Geometrías no-euclidianas, EUDEBA, Buenos Aires, 1961.

Geometría proyectiva, EUDEBA, Buenos Aires, 1966.

Espacios vectoriales y Geometría Analítica, monografías de la OEA, Washington, 1965.

La matemática en la escuela secundaria, EUDEBA, Buenos Aires, 1966.

Probabilidad e inferencia estadística, monografías de la OEA, Washington, 1970.

Evolución de las ciencias en la República Argentina, vol. I, *La Matemática* (en colaboración con otros autores), Sociedad Científica Argentina, Buenos Aires, 1975.

Geometría Espinorial, Instituto Argentino de Matemática, CONITECT, Buenos Aires, 1976.

* El lector interesado también puede consultar la *Revista de la Unión Matemática Argentina*, volumen 29, números 1 y 2 (dedicados al profesor Lluís A. Santaló), Bahía Blanca, 1979. La mencionada Revista contiene un repertorio bibliográfico completo (hasta 1979) de los artículos de investigación y divulgación del autor, así como de sus conferencias publicadas. *(N. del ed.).*

Integral Geometry and Geometric Probability, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Reading, 1976. (Traducido al ruso.)

La educación matemática, hoy, Teide, Barcelona, 1975.

La enseñanza de la matemática en la Escuela Media, Docencia, Buenos Aires, 1981.

ÍNDICE ONOMÁSTICO

Abad Oliva, 49
Abderramán III, 45
Adelboldo (obispo de Utrecht), 48
Ahmes, 28, 35
Al-Khuwarizmi, 45
Ambartzumian, R. V., 61, 72, 124
Apolo, 32
Apolonio de Perga, 41
Aristarco, 65
Aristóteles, 64
Arnolfo (obispo de Girona), 49
Arquímedes, 37, 44, 145
Arquitas, 33
Asurbanipal, 27
Atenea, 17
Ayache, N., 123
Azorín Poch, F., 99

Banach, 21
Bayes, J., 80
Beda el Venerable, 42, 49
Beethoven, 14
Berkeley, 70, 71
Bernoulli, Jacobo, 77, 79
Bernoulli, Johann, 56
Bernoulli, Nicolás, 79
Bernstein, C., 144
Bignoli, A. J., 99
Binet, J. L., 81
Birkhoff, George, 15
Blaschke, W., 72, 117, 124
Boissonat, J. D., 123
Borel, 107, 108, 146
Brahe, Tycho, 65
Bréhier, E., 12, 46
Budden, 87
Buffon, conde de (Georges Louis Leclerc), 80, 81, 82, 84, 85, 87, 89, 113, 117, 124

Caballero de Meré, 77, 78
Cantor, Georg 97, 98, 101
Cardano, Girolamo 55, 57
Cauchy, 70
Chern, 123
Chevalley, 70
Chomsky, 95
Clauriaut, 43
Copérnico, 42, 61, 64
Cormack, A. M., 141, 142, 143
Crofton, M. W., 113, 114
Cruz Orive, L. M., 134, 140
Cyrano de Bergerac, 66
Czuber, E., 117

D'Alembert, 70
Dalí, Salvador, 16
De Moivre, 80
Delambre, 44
Delesse, A., 135

Deltheil, R., 117
Demócrito, 70
Descartes, 33, 67, 68
Diderot, 70
Diofante, 42
Douady, 107
Dudeney, H. E., 21
Durero, Albrecht, 16, 20

Einstein, 21, 23
Elias, Hans, 134
Eratóstenes de Cirene, 17, 41
Escher, M. C., 16
Euclides, 18, 32, 37, 38, 43, 44, 69, 100
Eudoxio de Ascalón, 32, 33
Euler, 70, 71, 80, 115

Federer, 123
Federico II, 45, 46
Fedorov, E., 15, 126
Fermat, 33, 67, 77, 78
Fermi, 14
Ferrari, 55, 57
Ferro, Scipione del, 55
Filolao, 31, 69
Fontana, Nicolò (Tartaglia), 55, 57, 58
Fourier, 71
Francesca, Piero della, 16
Franco de Liège, 47
Frechet, Maurice, 21
Fu, 123

Galileo, 13, 23, 61, 66, 67, 68, 76, 78, 109
Gardner, Martin, 21
Gauss, 115
Gelfand, 72
Gerberto de Aurillac 46, 48
Glauco, 32
Glaucón, 37
Gleick, James, 106
Goethe, 22
Goldbach, 19
Golubitsky, Martin, 97
Gordan, 22
Grenander, 72
Gridgeman, 88
Gundersen, H. J. G., 140
Gutenberg, 46, 53

Halley, 79
Hausdorff, 21, 100
Heisenberg, Werner, 23
Helgason, S., 72, 143
Hernández, José, 17
Hilbert, David, 22
Hipócrates de Quío, 16, 33
Hounsfield, G. N., 142, 143
Huygens, 79

Inocencio IV, 46

Jacobi, 35

Kant, Inmanuel, 23
Kaufmann, A., 99
Kendall, D. G., 72, 88, 117, 124, 127
Kepler, J., 61, 66, 67, 68, 109
Koch, 14, 101, 106
Kohlas, J., 89

Lagerstrom, 15
Lagrange, 70, 71
Laplace, 69, 71, 84, 86, 88, 109
Legendre, 44
Leibniz, 61, 68, 69, 70, 71
Leonardo da Vinci 14, 15, 23
Lindemann, 34, 146
Linneo, 81
Luis XV, 81

Machin, J., 145
Mandelbrot, B., 16, 96, 100, 103, 104, 107, 108
May, Robert, 106
Mecke, J., 72, 124
Menecmo, 37
Menón, 38
Miguel Ángel, 14
Miles, R. E., 124
Millàs Vallicrosa, J., 48
Minkowski, 21, 123
Minos de Creta, 32
Montesinos Amilibia, 16
Montmort, 79, 80
Moran, P. A. P., 88, 117

Neumann, J. von, 89
Newton, 38, 61, 68, 69, 70, 71, 97, 107, 145
Nicomedes, 33
Novalis, 23

Ortega y Gasset, 12
Otho, Valentin, 145

Pacioli, Luca, 15, 53, 55
Palamedes, 27, 75
Palermita, Giovanni (Juan de Palermo), 45
Pappus, 42
Pascal, 77, 78
Peano, 100
Peitgen, H. O., 16, 103
Pérez Gómez, 16
Pico della Mirandola, Giovanni, 23
Pisano, Leonardo (*Fibonacci*), 28, 29, 45, 46, 53
Pitágoras, 16, 29, 32, 35
Platón, 27, 34, 35, 36, 42, 43, 66, 71
Poisson, 124, 126
Polya, G., 15, 126
Poston, T., 97
Proclo, 38, 42
Prony, 44
Ptolomeo I, 38
Ptolomeo, Claudio, 41, 64, 145

Radon, J., 141, 142
Reginboldo de Colonia, 47
Rey Pastor, 56
Richter, 146
Richter, P. H., 16
Robins, 30
Rodolfo de Lieja, 47
Roger, J., 81
Rolle, Michel 70
Rosiwal, 136

Sampe, D., 103
San Agustín, 21, 22
San Isidoro, 42
San Juan, 19
Santaló, Ll. A., 85, 87, 117
Scheler, Max, 41, 63
Schute, 30
Shanks, William, 146
Sierpinski, 101, 102, 106
Simón Pedro, 19
Singmaster, 87
Smale, S., 97
Sócrates, 37, 38
Sófocles, 75
Steiner, 120, 122
Steward, J., 97
Stoyan, D., 72, 124
Sussmann, H., 97

Tales de Mileto, 30, 35
Tannery, Paul, 47
Thom, René, 18, 95, 96, 97

Ulam, 89
Underwood, E. E., 140

Veblen, O., 12
Vega, 146
Velázquez, 14
Vitrubio, 15
Volta, 14
Voltaire, 70
Voronoi, 126

Weibel, E. R., 134
Weierstrass, 100
Weyl, Hermann, 123
Whitehead, J. H. C., 12
Whitney, H., 96
Witt, Jan de, 79
Wolf, P., 88
Wronski, H., 69

Zadeh, L. A., 96, 97, 98, 99
Zahle, 123
Zahler, R. S., 97
Zalcman, L., 144
Zeeman, E. C., 96, 97
Zenón de Elea, 70
Zuanne de Tonini, 56

ÍNDICE

Introducción 7

1. **La matemática: técnica, arte, filosofía y ciencia** 9

   1. La matemática 11
   2. La matemática como técnica 13
   3. La matemática y el arte 14
   4. La matemática y la magia 16
   5. La matemática como filosofía y como ciencia..... 21
   6. Opiniones sobre la matemática 22

2. **El nacimiento de la matemática** 25

   1. Babilonia y Egipto 27
   2. La matemática en la Grecia clásica..... 30
   3. La matemática en la educación: Platón y la *República* 34
   4. Euclides y Arquímedes..... 37

3. **La Edad Media. El año 1000. Gerberto de Aurillac**... 39

   1. La decadencia..... 41
   2. El sistema de numeración hindú-arábigo 44
   3. El año 1000. Gerberto de Aurillac 46

4. **El Renacimiento. Tartaglia y los desafíos matemáticos** 51

   1. La imprenta. La galaxia Gutenberg..... 53
   2. Tartaglia y los desafíos matemáticos 55
   3. Las actuales olimpíadas matemáticas..... 57

5. **La Edad Moderna. Copérnico y Kepler. La Ciencia Nueva de Galileo. Newton y Leibniz** 61

1. La Edad Moderna 63
2. El sistema nuevo del mundo 64
3. La Ciencia Nueva de Galileo 66
4. Newton y Leibniz 68

6. **Origen y evolución de la teoría de probabilidades** 73

1. Prehistoria del cálculo de probabilidades 75
2. Los creadores: Fermat y Pascal 77
3. La evolución del cálculo de probabilidades 78
4. Buffon y el problema de la aguja 81
5. Generalizaciones: Laplace 84
6. El método de Monte Carlo 87

7. **La producción matemática: temas y modas** 91

1. La producción matemática 93
2. Algunas modas de los últimos años 95
3. Las «catástrofes» de René Thom 96
4. Los conjuntos borrosos de Zadeh 97
5. Los fractales de Mandelbrot 100
6. Sistemas dinámicos y caos 104
7. La geometría fractal 108

8. **Geometría integral. Geometría estocástica** 111

1. Geometría integral 113
2. La medida cinemática 117
3. Geometría estocástica 124
4. Teoría de la forma 127

9. **Estereología. Tomografía computada** 131

1. La estereología 133
2. La tomografía computada por rayos X 141

Apéndice 145

Historia del número π 145

Libros publicados de Lluís A. Santaló 147

Índice onomástico 149

Impreso en el mes de octubre de 1994
en Talleres Gráficos HUROPE, S. A.
Recaredo, 2
08005 Barcelona